Обобщение метода интервалов.

С.Н.Горшкова, канд. физ.-мат. наук, профессор Институт Современных Технологий и Экономики КубГТУ.

Т.П.Егорова, старший преподаватель каф. прикладной математики КубГТУ, E-mail: daswerk@yandex.ru

В настоящее время в высшей математике обозначился ряд задач, для решения которых достаточно знаний элементарной математики, но до решения которых не доходит дело в средней школе. С одной стороны на умении решать эти задачи основывается решение некоторых задач высшей математики, с другой стороны, навыки, приобретенные при решении этих задач, помогут справиться с некоторыми задачами уровня «С» в ЕГЭ. Речь идет о методе областей для решения неравенства и системы неравенств с двумя переменными. Приобрести навыки в решении таких неравенств можно, обобщив метод интервалов. Метод интервалов, применяемый для решения неравенств с одной переменной, основывается на свойстве непрерывности элементарных функций. Суть метода состоит в том, что элементарные функции непрерывны в области своего определения, и изменение знака функции может произойти либо в разрывах области определения, либо в нулях функции. Процесс решения неравенства сводится к следующим этапам:

- нахождение области определения функции,
- нахождение нулей функции и постановка их на область определения,
- нахождение знаков функции на полученных интервалах.

Покажем, как используя метод аналогий, распространить метод интервалов на тригонометрические неравенства, неравенства с двумя переменными, параметрические неравенства. Применение метода аналогий при обучении преследует несколько целей:

- во-первых, продемонстрировать то, как приемы и методы, дающие решение задачи в одной ситуации, применяются в другой ситуации,
- во-вторых, воспроизведение метода интервалов в изменившихся условиях его применения, приводит к повторению этапов решения и осознанию универсальности метода, каковым он и является на самом деле,

- в-третьих, происходит обучение решению достаточно сложных типов неравенств, умение решать которые помогает освоению разделов высшей математики.

Решения тригонометрических неравенств можно оформлять либо на числовой прямой, что крайне неудобно, либо на тригонометрическом круге. Для того, чтобы подобрать тригонометрические неравенства для демонстрации метода интервалов, можно взять тригонометрическое уравнение, которое предлагается в части «С» на ЕГЭ, и решение которого предполагает оформление области определения функции и проверку корней уравнения на принадлежность области определения, и преобразовать это уравнение в неравенство. Далее действовать по намеченному плану: найти область определения функции и нанести ее на круг; найти нули функции и нанести их на тот же круг, в итоге круг будет разбит на дуги, на которых функция сохраняет свой знак. Необходимо проверить знаки функции на полученных дугах. Далее, обходя круг против часовой стрелки, выписать ответ, учитывая периодичность точек на круге.

Прежде чем демонстрировать метод интервалов для решения параметрических неравенств, который называется методом областей, необходимо показать решение неравенства с двумя переменными на плоскости XOY. Построение линий и областей на плоскости XOУ более привычное дело, чем на плоскости XOα (где α-параметр). Чтобы подобрать такие неравенства, можно для начала взять несложное параметрическое неравенство, и заменить параметр α на переменную у. Далее вводится в рассмотрение функция двух переменных f(x,y). Областью определения функции двух переменных является либо вся плоскость XOУ, либо некоторые части плоскости. Далее функция приравнивается к нулю и строится линия f(x,y)=0, которая разбивает область определения на части, на которых функция сохраняет свой знак. Далее методом пробной точки выбирается произвольная точка из каждой области, ее координаты подставляются в функцию и просчитывается знак функции. Далее выписывается ответ, т.е. при фиксированном y, пределы изменения переменной x задаются, как функции y, либо наоборот. Необходимо отметить, что навыки, приобретенные при выписывании ответа необходимы при расстановке пределов интегрирования в двойном интеграле.

После приобретения навыков в решении одного неравенства с двумя переменными, можно перейти к системе несложных неравенств с двумя переменными. В простейшем варианте - это система 3-4 или более линейных неравенств, которая на плоскости ХОУ описывает либо ограниченный, либо неограниченный многоугольник. Такие системы являются системами ограничений в задачах линейного программирования.

Далее необходимо связать решение параметрического неравенства с неравенством с двумя переменными. Проше всего это сделать, если решить неравенство с двумя переменными x и y, и предложить аналогичное неравенство, но с переменными x и α. Решением такого неравенства являются области плоскости ХОα. Чаше всего ось ординат является осью параметра, и необходимо показать, каким образом, фиксируя параметр, мы видим решение неравенства. Имея решение параметрического неравенства на плоскости, можно задавать и получать ответы на многие вопросы, связанные с данным неравенством, тогда как в задачах ЕГЭ задается один конкретный вопрос. Необходимо отметить, что не всякое неравенство удастся решить указанным методом, как не для всякой функции двух переменных можно легко построить график. Расширить класс решаемых параметрических неравенств удается, если использовать приложения, позволяющие строить графики на плоскости, такие, как Advanced Grapher, FxGraph, MathCAD, MathLab и др.