ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ДЕЙСТВУЮЩИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ФУНКЦИЮ СОСТОЯНИЯ (ПРОГИБ)

Крупенин В. Л.
ИМАШ РАН
Москва, Россия

INTEGRATED PRESENTATION OF DECISIONS OF THE LINEAR WAVE EQUATION WITH ACTING RESTRICTIONS ON FUNCTION CONDITIONS (DEFLECTION)

Krupenin V.L.
IMASh RAS
Moscow, Russia

Рассмотрим линейное волновое уравнение, описывающее состояние (прогиб от положения равновесия) линейной струны. Пусть прогиб есть $u(x,t)$; $t\geq 0$, $x\in[-1/2, 1/2]$. И пусть:

$u(x,t) \geq \Delta > -1$; (1)

$u(0,t) \geq \Delta_1 > \Delta$ (2)

При реализации строгих неравенств система описывается линейным волновым уравнением $\bullet u \equiv u_{tt}-u_{xx}=0$, где без ограничения общности приняты единичными физические параметры струны. Граничные и начальные условия: $u(-1/2,t)= u(1/2,t)=0$; $u(x,0)=u_0(x)$; $u_t(x,0)=0$. Гладкость функции $u_0(x)$ обеспечивает существование и единственность решения линейной задачи Коши для уравнения $\bullet u=0$, по крайней мере, в обобщенном смысле. Приведем определяющие соотношения.

При реализации в соотношении (1) равенства, ограничитель действуют на струну «от себя». Поэтому при $x\neq 0$, если $u\leq 0$, то $\bullet u\geq 0$. Оперируя с обобщенными решениями, потребуем, чтобы носитель обобщенной функции supp $\bullet u\subset\{(x,t);x=0,\ |u(x,t)|=\Delta\}$.Гипотеза удара предполагает, что потерь энергии не происходит, т.е. как и для линейной струны в смысле обобщенных функций

$$\partial/\partial t\ (|u_x|^2+|u_t|^2\}=\partial/\partial x\ (2u_t u_x). \quad (3)$$

Это соотношение в данном уже «нелинейном случае» постулируется и дает аналог классической гипотезы об абсолютно упругом ударе: $u_t(x,t-0)=-u_t(x,t+0)$, $(x,t)\in$ supp $\bullet u$; $u(x,t)= \Delta$; $x\neq 0$.

При $x=0$ образуются временные выстои струны.. При этом во время выстоя на струну при $u(0,t)=\Delta_1$ ($t\in[t_k, \theta_k]$) действует сила реакции $R_k(t)$, где t_k и θ_k - моменты начала и конца выстоя; *k* -целочисленный индекс - здесь и везде отвечает некоему *k*-му взаимодействию.

Тогда, если записать обобщенную функцию $\Phi_0[u]$, символически выражающую силу порождаемую ограничениями (1) и (2), она, будет представляться в виде двух обобщенных функций: $\Phi_0[u]=\Phi_1[u]+\Phi_2[u]$. Причем при *n-м* взаимодействии,

$$\Phi_1[u]=J(x)\delta[t-t_n(x)]\gamma(x;\Delta). \quad (4)$$

Здесь J(x) –плотность ударного импульса, $t_n(x)$ – распределение *n*-й «фазы» удара, определяемой в данном случае как решение уравнения $u[x, t_n(x)]|= \Delta$, где $x\neq 0$; $\delta(t)$ - δ-функция Дирака. Индикаторная функция - нестрогое. Для второй составляющей силы взаимодействия в некоем j-м случае имеем:

$$\Phi_2[u]= R_j(t)\,\delta(x)[\eta(t- t_j) - \eta(t-\theta_j)],\ \ R_j(t)= u_x(-0,t) – u_x(+0,t)\geq 0,;\ t\in [t_j, \theta_j], \qquad (5)$$

где $\eta(t)$ – единичная функция Хевисайда. Анализируемая задача, следовательно, может быть записана в виде нелинейного уравнения типа Клейна – Гордона • $u-\Phi_0[u]=0$ с краевыми и начальными условиями (2).

Выведем представления периодических стоячих волн некоторого периода $T(E)=2\pi/\omega$ где ω - частота; E – полная энергия. Воспользуемся методами частотно-временного анализа к интегральному уравнению T- периодических колебаний

$$u(x,t)=\int_0^T \int_{-1/2}^{1/2} \chi(x,y;\ t-s)\Phi_0[u(x,t-s)]dsdy; \qquad (6)$$

При этом периодическая функция Грина (ПФГ):

$$\chi(x,y;\ t)= \sum \sin\pi n(x+1/2)\sin\pi n(z+1/2)\chi_n(t).\ n =0,\pm 1,\ \pm 2,\ldots \qquad (7)$$

Внося (4) и (5) в (6), находим, предполагая, что за каждый период искомого периодического движения происходит лишь одно взаимодействие:

$$u(x,t)= \int_{-1/2}^{1/2} J(y)\,\gamma(y;\Delta)\,\chi\,(x,y;t-\varphi\,(y)]dy+\int_{t_1}^{q_1} R(s)\,\chi\,(x,0;t-s)ds, \qquad (8)$$

где φ (x) – распределение фазы удара. Представление решения в виде называется трехфункциональным, ибо три функции J(x), $\varphi(x)$ и R(t), определяемые сформулированными выше условиями и дают описание искомой стоячей периодической волны.

Методы вычислений ПФГ χ, параметров q_1 и $\mathbf{t}_1$ и др. даны в [1].

Литература

1. Крупенин В.Л. К описанию динамических эффектов, сопровождающих колебания струн вблизи однотавровых ограничителей// ДАН-. № 388 (3). -2003.