

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАДАНИЙ В МУЛЬТИПРОЦЕССОРНОЙ СИСТЕМЕ МЕТОДОМ ФЛЕТЧЕРА-РИВСА

Кайнов А.С.

Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева

Казань, Россия

Рассматривается задача оптимального распределения n заданий по \mathbf{I} компьютерам мультимикропроцессорной системы [1]. Необходимо определить план распределения заданий $X = (x_{iz})_{\mathbf{I} \times \mathbf{I} \times n}$, обеспечивающий минимум целевой функции:

$$F(X) = I_1 \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mathbf{I}} \sum_{j=1}^{\mathbf{I}} \left(\sum_{z=1}^n t_{iz} x_{iz} - \sum_{z=1}^n t_{jz} x_{jz} \right)^2 + I_2 \sum_{i=1}^{\mathbf{I}} \sum_{j=1}^n t_{iz} x_{iz} \Rightarrow \min \quad (1)$$

при следующих ограничениях:

$$g_z(X) = \sum_{i=1}^{\mathbf{I}} x_{iz} - 1 = 0 \quad (z = \overline{1, n}), \quad (2)$$

$$g_{iz}(X) = x_{iz}(1 - x_{iz}) = 0 \quad (i = \overline{1, \mathbf{I}}; z = \overline{1, n}). \quad (3)$$

Элементы x_{iz} плана распределения X являются непрерывными величинами и имеют следующий смысл: если $x_{iz} = 1$, то z -е задание выполняется на i -м компьютере, если $x_{iz} = 0$, то z -е задание на i -м компьютере не выполняется. Величина t_{iz} – это время выполнения z -го задания на i -м компьютере, I_1, I_2 – коэффициенты целевой функции. Целевая функция (1) является сверткой двух критериев: загруженность компьютеров должна быть равномерной, суммарное время работы компьютеров должно быть минимальным.

Ограничение (2) требует, чтобы каждое задание выполнялось только на одном компьютере. Ограничение (3) требует, чтобы на i -м компьютере задание z либо выполнялось целиком, либо вовсе не выполнялось.

Задача (1)-(3) является непрерывной с ограничениями типа равенств и относится к классу задач нелинейного программирования. Для решения исходной задачи она формулируется как задача безусловной оптимизации, и в результате математическая модель распределения заданий в мультимикропроцессорной системе выглядит следующим образом:

$$F(X) = I_1 \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mathbf{I}} \sum_{j=1}^{\mathbf{I}} \left(\sum_{z=1}^n t_{iz} x_{iz} - \sum_{z=1}^n t_{jz} x_{jz} \right)^2 + I_2 \sum_{i=1}^{\mathbf{I}} \sum_{j=1}^n t_{iz} x_{iz} + A_1 \sum_{z=1}^n \left(\sum_{i=1}^{\mathbf{I}} x_{iz} - 1 \right)^2 + A_2 \sum_{i=1}^{\mathbf{I}} \sum_{z=1}^n x_{iz}^2 (1 - x_{iz})^2 \Rightarrow \min \quad (4)$$

Решение $X = (x_{iz})_{1 \times 1 \cdot n}$ имеет смысл только тогда, когда элементы вектора X принимают значения 0 или 1, поэтому решение округляется в соответствии со следующим правилом:

$$x_{iz} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{iz} \geq 0.5 \\ 0, & \text{если } x_{iz} < 0.5 \end{cases} \quad (5)$$

Для решения задачи (4) применяется метод Флетчера-Ривса [2], который относится к классу градиентных методов поиска приближенного решения. Метод Флетчера-Ривса состоит в построении последовательности точек $\{X^k\}$, где $X^k = (x_{iz}^k)_{1 \times 1 \cdot n}$, $k = 0, 1, \dots$, обеспечивающей убывание целевой функции (т.е. $F(X^{k+1}) < F(X^k)$), где точки последовательности вычисляются по правилу:

$$X^{k+1} = X^k + t_k D^k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (6)$$

а величина шага t_k определяется для каждого значения k из условия:

$$F(X^k + t_k D^k) \rightarrow \min_{t_k}. \quad (7)$$

Решение задачи (7) сводится к нахождению корней полинома третьей степени. Направление убывания $D^k = (d_{iz}^k)_{1 \times 1 \cdot n}$ определяется по формуле:

$$D^k = \begin{cases} -\nabla F(X^0), & \text{если } k = 0 \\ -\nabla F(X^k) + b_{k-1} D^{k-1}, & \text{если } k > 0 \end{cases}, \quad (8)$$

где вектор-градиент $\nabla F(X^k)$ целевой функции и коэффициент b_{k-1} определяются как:

$$\nabla F(X^k) = \left(\frac{\partial F(X^k)}{\partial x_{iz}} \right)_{1 \cdot 1 \cdot n} \quad \text{и} \quad b_{k-1} = \frac{\|\nabla F(X^k)\|^2}{\|\nabla F(X^{k-1})\|^2}.$$

Евклидова норма $\|\nabla F(X)\|$ вычисляется по формуле:

$$\|\nabla F(X)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^1 \sum_{z=1}^n \left(\frac{\partial F(X)}{\partial x_{iz}} \right)^2} \quad (9)$$

Алгоритм Флетчера-Ривса состоит из следующих этапов:

Входные параметры алгоритма: начальное состояние $X^0 = (x_{iz}^0)_{1 \times 1 \cdot n}$, параметры критериев останова $e_1, e_2 > 0$, предельное число итераций M .

1. Установить счетчик итераций: $k = 0$.

2. Вычислить градиент $\nabla F(X^k) = \left(\frac{\partial F(X^k)}{\partial x_{iz}} \right)_{1 \times 1 \cdot n}$, используя следующую формулу:

$$\frac{\partial F(X)}{\partial x_{iz}} = 2I_1 \sum_{j=1}^1 \sum_{q=1}^n (\mathbf{1}d_{ij} - 1)t_{iz}t_{jq}x_{jq} + I_2 t_{iz} + 2A_1 \left(\sum_{j=1}^1 \sum_{q=1}^n d_{zq}x_{jq} - 1 \right) + 2A_2 (x_{iz} - 3x_{iz}^2 + 2x_{iz}^3) \quad (i = \overline{1, \mathbf{1}}; z = \overline{1, n}).$$

3. Проверить выполнение условия окончания $\|\nabla F(X^k)\| < e_1$. Если условие выполнено, то принять $X^* = X^k$ и перейти на п.9.

4. Если выполняется условие $k \geq M$, то $X^* = X^k$ и перейти на п.9.

5. Определить направление убывания $D^k = (d_{iz}^k)_{1 \times 1 \cdot n}$ по формуле (8).

6. Найти $t_k^* : F(X^k + t_k^* D^k) = \min_{t_k} F(X^k + t_k D^k)$. Если t_k^* не найден, то принять $t_k^* = 0$.

7. Вычислить новую точку $X^{k+1} = X^k + t_k^* D^k$.

8. Если одновременно выполняются условия $\|X^k - X^{k-1}\| < e_2$, $\|X^{k+1} - X^k\| < e_2$, $|F(X^k) - F(X^{k-1})| < e_2$, $|F(X^{k+1}) - F(X^k)| < e_2$, то принять $X^* = X^{k+1}$ и перейти на п.9. Иначе установить $k = k + 1$ и перейти на п.2.

9. Округлить координаты точки $X^* = (x_{iz}^*)_{1 \times 1 \cdot n}$ в соответствии с правилом (5).

10. Если план X^* удовлетворяет ограничениям (2) и (3), то X^* – найденное решение, в противном случае – решения не найдено.

11. Выход.

В работе исследовано влияние параметров алгоритма на получаемые решения и скорость работы алгоритма. Предложен способ выбора начальных точек $X^0 = (x_{iz}^0)_{1 \times 1 \cdot n}$ из окрестности центра единичного куба, т.е. $x_{iz}^0 = [0.5 - \Delta x; 0.5 + \Delta x]$. Численные эксперименты показали, что наилучшие значения Δx находятся в интервале от 0.05 до 0.2. Однако, при слишком малом Δx может возникнуть ситуация когда все точки из окрестности $(0.5 - \Delta x; 0.5 + \Delta x)$ будут находиться в области притяжения локальных минимумов, далеких от оптимального решения, что ограничит потенциальную возможность алгоритма найти глобальный минимум. Поэтому рекомендуется выбирать параметр Δx из диапазона $[0.15; 0.2]$.

В работе исследованы критерии останова и выявлены их недостатки, приводящие к избыточному числу итераций алгоритма. Предложен модифицированный критерий останова, использующий относительные приращения целевой функции, позволяющий сократить число итераций без потери качества получаемых решений.

Результаты численных экспериментов показали эффективность метода Флетчера-Ривса для решения задачи распределения заданий в мультипроцессорной системе, и были даны рекомендации по выбору параметров алгоритма.

Литература:

1. Дегтярев Ю.И. Исследование операций: Учеб. для вузов по спец. АСУ. – М.: Высш. шк., 1986. – 320 с.: ил.
2. Летова Т.А., Пантелеев А.В. Экстремум функций в примерах и задачах: Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1998.-376 с.: ил.