О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Крупенин В. Л.
Институт машиноведения РАН
Москва, Россия

TO MATHEMATICAL MODELLING OF THE NONLINEAR WAVE PROCESSES

Krupenin V.L.
Mechanical Engineering Research Institute RAS
Moscow, Russia

1. В работе даются модели, порождающие нелинейные и (или) сильно нелинейные волн в струнах и других одномерных объектах**..**

Нелинейные волновые процессы обычно моделируются при помощи нелинейных дифференциальных уравнениях в частных производных. Для нелинейных аналогов волнового уравнения имеем [1]:

$$u_{tt} - c^2u_{xx}=h(u,u_t,u_x,t,x), \qquad (.10)$$

где h – нелинейная функция, структура которой определяется геометрическими и (или) физическими особенностями задачи. Раскладывая функцию h в ряд, в разных приближениях можно получать модели нелинейных волновых процессов.

Нелинейные волновые эффекты многочисленны и многообразны. Показывается, что при рассмотрении простейших нелинейных моделей проявляются такие весьма характерные и важные явления как «деформирование» и «опрокидывание» профилей волн [1].

Весьма важной моделью нелинейных волн служит нелинейное уравнение Клейна-Гордона:

$$u_{tt} - c^2u_{xx}=\Phi(u), \qquad (2)$$

где $\Phi(u)$ – некоторая гладкая или разрывная функция, описывающая распределенные нелинейные восстанавливающие силы. Влинейном приближении $\Phi(u)$=-ku (k>0) имеем известную модель струны «на упругой постели».

2. Весьма важную модель - модель нелинейной струны можно получить, учитывая в представлении для упругой энергии системы в первом приближении член, кубический по смещению [1]. Ограничиваясь рассмотрением достаточно длинных волн, можно получить дополнительные члены уравнения движения, зависящие лишь от деформации u_x , но не от ее производных. Кроме того, в первом приближении можно записать можно записать также и член, учитывающий дисперсию. Тогда уравнение нелинейной струны (или уравнение продольных колебаний нелинейного стержня) можно привести к виду [1]:

$$u_{tt} - c^2(u_{xx}+l^2u_{4x} - bu_xu_{xx})=0, \qquad (3)$$

где c- по-прежнему скорость распространения волн в линейной модели, l – масштабный, считающийся малым, b – также малый параметр, характеризующий интенсивность нелинейных сил. Выбор положительного знака перед l^2 соответствует предположению, что среда имеет отрицательную дисперсию и групповая скорость убывает с ростом волнового числа. Дисперсия в данной модели оказывается нормальной. Выбор противоположенного знака привел бы к модели, аналогичной известной модели балки Бернулли [1].

Если Φ(u) – суть сингулярная обобщенная функция описывающая условия удара, то приходим к нелинейному уравнению Клейна-Гордона, моделирующее виброударную систему с распределенными ударными элементами. [2]..

3. Весьма интересную базовую модель дает называемое уравнение Кортевега – де Фриза, (уравнение КдФ) оказывающееся принципиальным при рассмотрении моделей нелинейных волн [1].

$$w_t + w_x+\varepsilon w_{xxx} +\mu w w_x =0. \qquad (4)$$

Если перейти к подвижной системе координат $x\to x-t$, то вместо (4) получим

$$w_t +\mu w w_x +\varepsilon w_{xxx} =0. \qquad (5)$$

Данное уравнение также называют уравнением Кортевега – де Фриза. При замене $w\to -w$ вместо (.14) будем иметь:

$$w_t + w_x+\varepsilon w_{xxx} -\mu w w_x =0. \qquad (6)$$

Если продифференцировать это уравнение по t и заменить значение w_t его представлением из (6), то:

$$w_{tt} – w_{xx}– 2\varepsilon w_{4x} + 2\mu(w w_x)_x+\varepsilon\mu(2w w_{xx}+0,5w_x^2)_{xx} - \varepsilon^2 w_{6x} -\mu^2(w^2 w_x)_x = 0, \qquad (7)$$

то есть (3) и (7) совпадают с точностью до членов $\sim\varepsilon^2$ и $\sim\mu^2$. Следовательно, решения уравнения КдФ (6) точно удовлетворяют уточненному уравнению нелинейной струны (7) и приближенно исходному уравнению (3). О других примерах волновых уравнений, множество решений которого содержит решения уравнения КдФ см. например в [1].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 04-01-00611).

Литература

1.Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.М:Наука-1997. – 622 с.

2..Крупенин В.Л. К описанию динамических эффектов, сопровождающих колебания струн вблизи однотавровых ограничителей// ДАН .-. 2003,. № 388 (3).- С.12-15.