Являются ли простыми числа 2 и 3?

Тупик Н. В.
г.Каспийск, Россия.

Are the Numbers 2 and 3 prime?

Tupik N. V.
Kaspijsk, Russia

Простые числа, которые представляют собой натуральные числа, имеющие своими натуральными делителями только единицу и самого себя, очень давно привлекают внимание людей своими необычными свойствами. На числовой оси такие числа расположены неравномерно. Их больше в начале числовой оси и далее они встречаются реже. Но при этом количество простых чисел не ограничено. Среди простых чисел есть так называемы «близнецы», т.е. простые числа, разность между которыми равна 2, например 11 и 13, 17 и 19. Причем это свойство сохраняется и для больших чисел. Например, близнецами являются следующие пары 100…000181771 и 100…000181773, 100…00014317 и 100…00014319, где многоточие заменяется нужным количеством нулей, таким, чтобы общее количество цифр в каждом числе в первой паре составляло по 166 цифр, а во второй – по 203.

Простых правил для получения простых чисел пока не выявлено. Одним из таких правил является «решето Эратосфена», которое позволяет отсеять из натурального ряда чисел все числа, которые не являются простыми и оставшиеся таким образом будут простыми. На более современном уровне предложено решето Сундарамы. Оно разработано индийским математиком С. П. Сундарамом в 40-х годах XX века и позволяет вычислить все простые числа, начиная с 1 до некоторого заданного числа n. В /1/ этот алгоритм приведён в следующем виде. Из натурального числового ряда исключаются все значения $Ф_n$ = i + j +2ij, где i =1,2,3,…, n; j = 1,2,3,…,i, а оставшиеся числа, т.е. то что не попало в фильтр $Ф_n$, умножаются на 2 и к ним прибавляется 1. Это и будут ряд простых чисел. То же самое может быть записано следующим образом. Простое число F, не превышающее 3n определяется следующим выражением: F = 2({1,2,3,…3n} – {i + j + 2ij}) + 1, где i = 1,2,3,…,n; j = 1,2,3,….,i; {….} – элементы множества.

Существует множество программ, которые вычисляют простые числа. Но тем не менее общих закономерностей пока не предложено.

Возьмём натуральный ряд чисел. Раскрасим все простые числа в этом ряду в тёмный цвет. Нарубим получившийся ряд кусочками по 6 начиная с первого (единичного) числа и получившиеся кусочки сложим друг под другом. В получившейся «берёзовой поленнице», состоящей из «поленьев» длиной по 6 чисел каждое и сложенных друг под другом, выявиться одна интересная закономерность. Все простые числа расположатся в два столбца с номерами «1» и «5», т.е. соответствующих позиции числа 1 и позиции числа 5 в самом верхнем «полене».

Таким образом выявляется первое свойство простых чисел. Любое простое число при делении на 6 в остатке даёт либо 1 либо 5. Это свойство для простых чисел необходимое, но не достаточное.

Второе свойство. Произведение любых простых чисел в любых комбинациях и в любом количестве не выходит за пределы указанных двух столбцов. Т.е. в столбцах «1» и «5» содержаться все простые числа и все произведения (гармоники) простых чисел.

Числа, сгруппированные в столбцы «1» и «5» обладают разными свойствами:

1. Произведение любого числа чисел, взятых из столбца «1» оставляет результат операции в столбце «1»;
2. Произведение четного числа чисел, взятых из столбца «5» переводит результат в столбец «1»;
3. Произведение нечётного числа чисел, взятых из столбца «5» оставляет результат в столбце «5»;
4. Произведение двух чисел взятых из столбцов «1» и «5» (перекрёстное произведение между столбцами) даёт результат в столбце «5».

Назовём все числа, попадающие в столбцы «1» и «5» потенциальным полем простых чисел (ПППЧ). Общая формула для вычисления любого элемента такого поля следующая: $6k\pm1$, где k – любое натуральное число. Обратим внимание, что любые фрагменты ПППЧ можно вычислять локально, т.е. не обращаясь для этого к началу числовой оси и тем самым не начиная вычисления каждый раз «от печки». Это важно для фрагментов ПППЧ, которые находятся на значительных удалениях от начала числовой оси. В дальнейшем величину $6k\pm1$ будем называть F-осью, т.к. она содержит только простые числа и все произведения любых простых чисел любой кратности и в любых сочетаниях между собой. Соотношение по количеству чисел между F-осью и рядом натуральных чисел – 1:3, т.е. F-ось является подвыборкой натурального ряда чисел, и на ней нет никаких других чисел кроме простых и их гармоник различного порядка. Процесс получения гармоник простых чисел можно пояснить следующим примером.

Возьмём F-ось, направим её слева направо и от её начала запустим фронт активации, который скользит от начала F-оси к её концу. Этот фронт будет по очереди встречать и активировать все числа на F-оси. Каждое число n_i F-оси, на которое пришёлся, в данный момент, фронт активации запускает вперёд себя волну с периодом $6n_i$ и фазой $\pm n_i$, т.е. начинает «звенеть». Во всех местах, где эта волна пересекается с F-осью простого числа быть не может, т.к. данное место занято гармоникой активированного числа. Такими местами будут следующие точки F-оси $n_i(6k\pm1)$, где величина $k = 1,2, \ldots, \infty$ и представляет собой кратность наложения периода числа n_i на ось. Действие гармоники любого числа n_i начинается со значения $5n_i$, лежащего на F-оси впереди самого числа n_i. Т.е. маркировка мест на F-оси, которые не могут быть простыми числами, производится как бы впереди фронта активации (своеобразный аналог предвыборки).

Поскольку число n_i также является элементом F-оси, то его можно представить в виде $n_i = (6m_j\pm1)$, где m_j – j-тое натуральное число. Тогда общая формула для вычисления любой гармоники любого числа на F-оси будет следующей $(6m_j\pm1)\cdot(6k\pm1)$, где $j = 1, 2, \ldots \infty$, а k пробегает все значения от 1 до ∞. Наложение всех гармоник от всех чисел уже активированной части F-оси и создаёт решето (формирует как бы волновое поле), маркирующее на F-оси все места, где не могут располагаться простые числа. Все не выделенные (не отмеченные этим аналогом волнового поля места) на активированном участке F-оси, который всегда начинается с 1 и заканчивается тем числом, где в данный момент находится фронт активации, и будут занимать простые числа. Причём это всегда выясняется до того, как фронт активация подойдёт к любому числу на F-оси, при своём последовательном распространении от начала этой оси. В этом преимущество именно такого способа вычисления гармоник: последовательно одна за другой начиная с самого первого числа на F-оси.

Как только активируется очередное число F-оси, к составляющим существующего поля добавляется ещё одна компонента (ещё одна гармоника) со своим периодом и фазой и т.д. Количество независимых составляющих, создающих волновое поле, равно количеству простых чисел, расположенных на активированном участке F-оси (в пределе можно использовать все числа на активированном участке F-оси) и для больших чисел может составлять миллионы компонент.

Наиболее густо числа на F-оси выбиваются «звенящими» компонентами с малыми значениями, т.е. теми, которые активируются в самом начале F-оси. Чем дальше от начала оси активируется число, тем длиннее период «звона», и тем реже на F-оси выбивает числа.

Указанный процесс очень напоминает вейвлет-анализ /2/ для рядов данных, в котором используются скользящие средние разной апертуры, от самых коротких, захватывающих лишь соседние данные, до самых длинных, охватывающих практически весь ряд, а результат действия всех фильтров складывается.

Таки образом на F-оси имеется возможность маркировать все места, которые являются гармониками активированных чисел, а на оставшихся немаркированных, на момент прихода фронта активации или после его прохождения, местах располагаются простые числа. К сожалению и этот алгоритм получения простых чисел носит не локальный, а глобальный характер и должен всегда начинаться с начала F-оси.

Некоторое преимущество данный подход имеет, если требуется выявить не все простые числа, а только некоторые на заданном интервале, который может быть расположен и на значительном удалее от начала F-оси. Например на интервале от $n_i = (6m_a \pm 1)$ до $n_j = (6m_b \pm 1)$, где m изменяется в диапазоне от a до b с шагом 1. Но и в этом случае необходимое количество используемых компонентов (p) для создания волнового поля будет (в пределе) равно $n_j/3$. Выигрыш происходит за счёт того, что действие всех этих компонент определяется только для локального интервала $[n_i, n_j]$ и количество вычислений зависит от длины этого интервала. При малых длинах интервалов и больших значений n_p в этом случае потребуется сделать всего одно – два вычисления.

Вернёмся к вынесенному в заголовок материала вопросу. Числа 2 и 3 не располагаются на F-оси. Они единственные простые числа в своих столбцах (столбцах «2» и «3» «берёзовой поленницы»), и лежат в самом их основании. Больше никаких простых чисел в этих столбцах нет, как и в столбце «4», где нет ни одного простого числа. Отсюда можно сделать вывод, что числа 2 и 3 лишь за своё внешнее сходство причислены к простым и эта операция для них не совсем законная. Скорее всего, они вместе с числом 4 представляют собой симметрии для чисел F-оси.

Литература

1. Википедия – свободная энциклопедия. Решето Сундарама. [http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B5%D1%88%D0%B5%D1%82%D0%BE_%D0%A1%D1%83%D0%BD%D0%B4%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%B0].
2. Воробьев В.П., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. СПб.: ВУС, 1999, 204 с.