К ПРОБЛЕМЕ ПОСТРОЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ 2D СИСТЕМ

Крупенин В. Л.
Институт машиноведения РАН
Москва, Россия

TO THE PROBLEM OF CONSTRUCTION OF THE OPERATIONAL EQUATIONS FOR 2D SYSTEMS

Krupenin V.L.
Mechanical Engineering Research Institute RAS
Moscow, Russia

1. В работе выводятся операторные и интегральные уравнения движения 2D систем.**.** Рассмотрим два семейство взаимно перпендикулярных упругих одинаковых линейных струн, защемленных на концах и имеющих соответственно длины L_1 и L_2. Каждая струна нумеруется при помощи индексов $k = 0,1,2,., N_1$ и $q = 0,1,2.. N_2$. Пусть струны образуют решетчатую 2D систему. В точках сопряжения помещены абсолютно твердые тела массами m. Главная особенность системы – ее состояние дается матрицей прогибов объекта в узлах.

Предположения: прямоугольные ячейки одинаковы; решетка – анизотропна; струнные элементы - безынерционны. Пусть силы диссипации, вынуждающие силы, а также любые другие неконсервативные силы – малы. Обозначив их $\varepsilon g_{kq}(t, u_{kq}, \dot{u}_{kq},\ldots)$, ε - малый параметр. Так как каждая частица лежит одновременно на двух струнах, то для всех значений индексов имеем N уравнений[$N= (N_1 -1)(N_2-1)$]:

$$m\ddot{u}_{kq}+c_1(2u_{kq}-u_{(k-1,q)}- u_{(k+1,q)})+c_2(2u_{kq}-u_{(k,q-1)}- u_{(k,q+1)})= \varepsilon g_{kq}(t, u_{kq}, \dot{u}_{kq},\ldots), \qquad (1)$$

где: $c_{1,2}$ - коэффициенты упругости. Граничные условия: $u_{kq}=0$, при $k=0;N_1$; $q=0;N_2$.

2. Приведем операторные уравнения движения, следующие из уравнений (1). В соответствии с общими методиками [1, 2,] построим оператор динамической податливости $\hat{L}(p)=||L_{kq,nj}(p)||$; $p\equiv d/dt$, В данном случае выражение $L_{kq,nj}(p)$ обозначает проходной оператор [1], ставящей в соответствие силе, приложенной в узле (n,j) перемещение узла (k,q). При n=k, j=q – имеем локальные операторы динамической податливости [2], отвечающие перемещению узла, вследствие силы, приложенной в нем самом. Для рассматриваемой системы принцип взаимности записывается как $L_{kq,nj}(p) == L_{nj,kq}(p)$.

Система уравнений движения (1) при этом разрешается в виде $||u_{kq}||= \varepsilon\hat{L}(p)||g_{,nj}||$,.

где $\varepsilon||g_{kq}||$ - матрица внешних сил, приложенных в узлах решетки,. что покомпонентно записывается так:

$$u_{kq}(t)=e\sum_n\sum_j L_{kq,nj}(p)g_{,nj}(t). \qquad (2)$$

Выражения для операторов динамических податливостей полностью определяются наборами собственных частот $\{\Omega_{kq}\}$ и нормированных коэффициентов собственных форм

$\{\Theta_{kq}\}$ линейной системы [2].Используя результаты, данные в монографии [1] для решетки рассматриваемого типа:

$$\Omega^2_{kq} = \frac{2T_1}{m\Delta L_1}[1-\cos(k\pi N_1^{-1})] + \frac{2T_2}{m\Delta L_2}[1-\cos(q\pi N_2^{-1})], \qquad (3)$$

$$\Theta_{kq}=C\sin(kn\pi N_1^{-1})\sin(qj\pi N_2^{-1}), \qquad (4)$$

C=const. При этом в силу выбранных граничных условий n = 1,2,… N_1-1 и также j = 1,2,… N_2-1. В соответствии с методами построения операторов динамической податливости [2] можно получить для компонентов оператора $\hat{L}$(p), определяющих (2):

$$L_{kq,nj}(p)=\zeta\sum_{a=1}^{N_1-1}\sum_{b=1}^{N_2-1}\sin(k\alpha\pi N_1^{-1})\sin(q\beta\pi N_2^{-1})\sin(\alpha n\pi N_1^{-1})\sin(\beta j\pi N_2^{-1})(\Omega^2_{ab}+p^2)^{-1}. \qquad (5)$$

Здесь введен нормировочный коэффициент ζ, который, в общих случаях удобнее всего вычислять при конкретно заданных параметрах системы. В данном случае можно положить: $\zeta=2[(N_1-1)(N_2-1)]^{-2}$.

3. Операторное представление (2) – универсально. Внося конкретизирующие предположения, можно получить простые представления для реализации формулы (2).

Если правые части (1) периодичны по времени с периодом T: при всех k и q,то. отыскивая T - периодическое решение, можно воспользоваться методами интегральных представлений периодических решений [2]:

$$u_{kq}(t)= e\sum_n\sum_j\int_0^T \chi_{kq,nj}(t-s)g_{nj}(s)ds, \qquad (5)$$

где функции $\chi_{kq,nj}(t-s)$ называются T - периодическими функциями Грина (ПФГ) [2-4] – проходными (k≠n; q≠j) или локальными (k=n; q=j) и определяются соответствующим оператором динамической податливости так ($T=2\pi\omega^{-1}$):

$$\chi_{kq,nj}(t)=T^{-1}\sum_{s=-\infty}^{\infty}L_{kq,nj}(i\sigma\omega)\exp(i\sigma\omega t),$$

ПФГ $\chi_{kq,nj}(t)$ – реакция узла (k,q) на силовое воздействие, приложенное в узле (n,j) и описываемое T– периодической последовательностью δ-функций Дирака – $\delta^T(t)$: определению

$$\delta^T(t)=\sum_{K=-\infty}^{\infty}\delta(t-Kt).$$

Эту обобщенную функцию можно разложить в сходящийся в обобщенном смысле ряд Фурье вида:

$$\delta^T(t)= T^{-1} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \exp(i\sigma\omega t).$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (Проект 05-08-50183).

Литература

1. Нагаев Р.Ф., Ходжаев К.Ш. Колебания механических систем с периодической структурой. - Ташкент: ФАН, 1973. – 272 с.
2. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах.-М., Наука, 1985. – 384 с.