Операторные уравнения движения систем общего вида, взаимодействующих через удары с выделенным объектом

Крупенин В.Л.
Институт машиноведения РАН
Москва, Россия
krupenin@online.ru

1. Рассмотрим семейство стационарных склерономных линейных упруго-вязких систем с полной диссипацией энергии [1] , обозначаемое далее $\mathbf{A}=\{\mathbf{A}_0;\mathbf{A}_1,..\mathbf{A}_N\}$. Каждой из систем $\mathbf{A}_r$ семейства $\mathbf{A}$ отвечает поле перемещений $u_r(x_r,t)\in \mathbf{R}^3$, причем вектора $x_r\in \mathbf{X}_r\subset R^3$ - суть векторные координаты точек систем $\mathbf{A}_r$; $t\in \mathbf{R}$; r=0,1,..,N.

Динамика всех членов семейства $\mathbf{A}$ определяется системами матричных операторов динамической податливости [1] $\mathbf{L}^{(r)}(\mathbf{y}_r,\mathbf{x}_r;p)$, где p - оператор дифференцирования. Указанные операторы имеют размерность [3x3] и ставят в соответствие силовым полям $\mathbf{f}_r(\mathbf{x}_r,t)$ $[\mathbf{x}_r\in \mathbf{X}_r]$ поля перемещений

$$\mathbf{u}_r(\mathbf{x}_r,t)= \mathbf{L}^{(r)}(\mathbf{y}_r,\mathbf{x}_r;p)\ \mathbf{f}_r(\mathbf{y}_r,t). \qquad (1)$$

Физический смысл каждой компоненты симметричной матрицы $\mathbf{L}^{(r)}(\mathbf{y}_r,\mathbf{x}_r;p)=\|L^{(r)}_{kl}\|$ (k,l=1,2,3) следующий.

Скалярный оператор $L^{(r)}_{kl}(y_r,x_r;p)$ ставит в соответствие *k*-й компоненте распределения силы $\mathbf{f}$ $(f_{kr}(y_r,t))$ *l*-ю компоненту перемещения $u_{lr}(x_r,t)$.

Каждый оператор $L^{(r)}$ является, вообще говоря, интегро-дифференциальным оператором и строится либо при посредстве исходной системы уравнений движения и необходимых дополнительных (например, граничных) условий, либо - на основании обработки экспериментальных данных [2]. Отметим, что присутствие нелинейных сил обращает представление (1) в нелинейное операторное уравнение.

Предположим теперь, что каждая из систем $\mathbf{A}_r$ (r=1,...,N) соударяется с системой $\mathbf{A}_0$ следующим образом.

Пусть при $\mathbf{x}_r=\mathbf{x}_{r0}$ в каждой из систем $\mathbf{A}_r$ сосредоточено по одному включению, содержащему точечные тела с сосредоточенными массами m_{r0}, и в то же время система $\mathbf{A}_0$ содержит N подобных включений при $\mathbf{x}_0=\mathbf{x}_{0r}$, в которых сосредоточены точечные тела с массами m_{0r}; r=1,...,N. Пусть далее тела с массами m_{r0} могут соударятся с телами, обладающими массами m_{0r} соответственно, так что объединенная система (семейство) **A** содержит N сосредоточенных ударных пар. Введем относительные координаты

$$\mathbf{u}_r(t)=\mathbf{u}_0(x_{0r},t)-\mathbf{u}_r(x_{r0},t). \qquad (2)$$

и обозначим $\Phi_r[\mathbf{u}_r(t),\mathbf{u}_{rt}(t)]$ силу удара в r-й ударной паре, причем здесь и далее индексация по времени обозначает дифференцирование. Теперь можно записать систему из *(N+1)*-го операторного уравнения движения объединеннной виброударной системы **A** (ср.[1]):

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}_0,t)=L^{(0)}(\mathbf{y}_0,\mathbf{x}_0;p)\{\mathbf{f}_0(y_0,t)\ -S\Phi_r[\mathbf{u}_r(t),\mathbf{u}_{rt}(t)]\delta(\mathbf{y}_0-\mathbf{x}_{0r})\};$$

$$(3)$$

$$\mathbf{u}_r(\mathbf{x}_r,t)=L^{(r)}(\mathbf{y}_r,\mathbf{x}_r;p)\{\mathbf{f}_r(\mathbf{y}_r,t)+\Phi_r[\mathbf{u}_r(t),\mathbf{u}_{rt}(t)]\delta(\mathbf{y}_r-\mathbf{x}_{r0})\},$$

где $\delta(\mathbf{x})$ - δ-функция Дирака; суммирование ведется для r=1,...,N. При помощи (2) можно понизить размерность анализируемой системы. Проведя N вычитаний второго уравнения (3) из первого уравнения (3), получаем для относительных координат (2) при r=1,...,N

$$\mathbf{u}_r(t)=\mathbf{U}_{r0}(t)-L^{(0)}(\mathbf{x}_{0r},\mathbf{x}_0;p)\ S\Phi_r[\mathbf{u}_r(t),\mathbf{u}_{rt}(t)]-L^{(r)}(\mathbf{x}_{r0},\mathbf{x}_r;p)\Phi_r[\mathbf{u}_r(t),\mathbf{u}_{rt}(t)]\ , \qquad (4)$$

где обозначено: $\mathbf{U}_{r0}(t)=L^{(0)}(\mathbf{y}_0,\mathbf{x}_0;p)\mathbf{f}(y_0,t)-L^{(r)}(\mathbf{y}_r,\mathbf{x}_r;p)\mathbf{f}(\mathbf{y}_r,t)$ - изменение относительных координат (2) в отсутствии ударов и введены операторы

$$L_k(0,r)(p)=L(0)(\mathbf{x}_{0r},\mathbf{x}_{0r};p);\ L_{0r}(p)=L^{(0)}(\mathbf{x}_{0r},\mathbf{x}_{0r};p)+L^{(r)}(\mathbf{x}_{r0},\mathbf{x}_{r0};p).$$

Таким образом соотношения (3) можно для удобства переписать и так:

$$\mathbf{u}_r(t)=\mathbf{U}_{r0}(t)-L_{0r}(p)\Phi_r[\mathbf{u}_r(t),\mathbf{u}_{rt}(t)]\ -\ L^{(0)}(\mathbf{x}_{0r},\mathbf{x}_0;p)\ S\Phi_k[\mathbf{u}_k(t),\mathbf{u}_{kt}(t)], \qquad (5)$$

причем суммирование осуществляется при $k\neq r$.

Выведенные соотношения - весьма общи, так как носят универсальный характер и описывают поведение представительного класса линейных между ударами систем. Если необходимые системы операторов динамической податливости и распределения внешних сил заданы, а гипотеза удара, определяющая функции Φ_k - конкретизирована, то, найдя из системы уравнений (4) представления относительных координат $\mathbf{u}_{r0}$, можно при помощи соотношений (3) найти перемещения любой точки семейства **A**.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных

исследований (проекты 08-01-00181 и 08-08-00220).

Литература

1. Babitsky V.I.,. Krupenin V.L. Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. –404 p.p.
2. Широкополосные виброударные генераторы механическтх колебаний.// Веприк А.М., Вознюк А.Д., Крупенин В.Л., Чирков И. М.- Л: Машиностроение, 1987.-72 с.