КЛАСС ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА КОШИ

Блюмин С.Л.

Липецкий государственный технический университет

Липецк, Россия

Классические функциональные уравнения Коши [1] $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$, $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$, имеющие непрерывные решения соответственно $k\cdot x$, $exp(k\cdot x)$, $k\cdot lnx$, x^k, связывают основные смежные (в смысле распределительного закона) арифметические операции сложения + и умножения · . В [2] указаны примыкающие к ним: «снизу» - операция $x\mathring{A}_{-1}y=ln(expx+expy)$, «сверху» - операция $x\ddot{A}_{+1}y=exp(lnx\cdot lny)$. Все эти операции являются звеньями «естественной цепи арифметических операций» $\mathring{A}_n$ [3], в которой $+=\mathring{A}_0$, $\cdot=\mathring{A}_{+1}$, так что $\ddot{A}_{+1}=\mathring{A}_{+2}$. Их связывает класс функциональных уравнений типа Коши (название указывает на связь различных арифметических операций)

$$f(x\mathring{A}_m\, y)=f(x)\mathring{A}_n\, f(y),$$

где m,n – целые числа. Решения некоторых уравнений (с малыми индексами) таковы:

m	n	Решение	m	n	Решение
-1	-2	$ln(ln(k\cdot expx))$	+1	-2	$ln(ln(k\cdot lnx))$
-1	-1	$ln(k\cdot expx)=lnk+x$	+1	-1	$ln(k\cdot lnx)$
-1	0	$k\cdot expx$	+1	0	$k\cdot lnx$
-1	+1	$exp(k\cdot expx)$	+1	+1	$exp(k\cdot lnx)=x^k$
-1	+2	$exp(exp(k\cdot expx))$	+1	+2	$exp(exp(k\cdot lnx))$
0	-2	$ln(ln(k\cdot x))$	+2	-2	$ln(ln(k\cdot ln(lnx)))$
0	-1	$ln(k\cdot x)$	+2	-1	$ln(k\cdot ln(lnx))$
0	0	$k\cdot x$	+2	0	$k\cdot ln(lnx)=ln(lnx)^k$
0	+1	$exp(k\cdot x)$	+2	+1	$(lnx)^k$
0	+2	$exp(exp(k\cdot x))$	+2	+2	$exp((lnx)^k)$

Наблюдающиеся здесь закономерности справедливы в общем случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.Нечепуренко М.И. Итерации вещественных функций и функциональные уравнения. – Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 1997.– 228 с.

2.Арнольд И.В. Теоретическая арифметика. – М.: ГУПИ, 1938. – 480 с.

3.Carroll M. The Natural Chain of Binary Arithmetic Operations and Generalized Derivatives [arXiv.org/math.HO/0112050]