ПРЕДФРАКТАЛЬНЫЙ ГРАФ С РЕГУЛЯРНОЙ ЗАТРАВКОЙ, ЕГО РАСПОЗНАВАНИЕ.

Утакаева И.Х.
Карачаево-Черкесская государственная технологическая академия

Задача распознавания объектов и явлений является актуальной задачей искусственного интеллекта и многих задач в военной области, в связи с этим вызывает интерес ее постановка и исследование.

В данной работе рассматривается задача распознавания предфрактального графа (см.[1,2]) $G=(V,E)$ с непересекающимися старыми ребрами, когда в качестве затравки (см.[3]) $H=(W,Q)$ выступает регулярный n-вершинный граф степени s=n-2.

Пусть множество Q состоит из $q=|Q|=\frac{n(n-2)}{2}$ ребер. Найдем количество ребер данного предфрактального графа

$$m(n,q,L)=q\left(1+n+n^2+...+n^{L-1}\right)=\frac{n(n-2)}{2}\,\frac{n^L-1}{n-1} \qquad (1)$$

Справедливы следующие

Теорема 1. Пусть граф $G=(V,E)$ является таким (n,L)-графом, в котором старые ребра (см.[3]) не пересекаются и его затравка $H=(W,Q)$ является однородным графом степени $\deg H=n-2$. Тогда его множество вершин V разбивается на два подмножества V_1 и V_2, где V_1 составляют вершины, степень которых равна $n-1$, а V_2 составляют вершины, степень которых равна $n-2$. При этом мощности этих множеств определяются соотношениями

$$|V_1|=\frac{n(n-2)\left(n^{L-1}-1\right)}{n-1} \qquad (2)$$

$$|V_2|=\frac{n^L-1}{n-1}+n-1 \qquad (3)$$

Доказательство. По условию теоремы, старые ребра в графе G не пересекаются. Это значит, что какая-либо из вершин $v\in V$ либо инцидентна одному старому ребру, либо не инцидентна ни одному из старых ребер. В первом случае - вершина инцидентна одному старому ребру и, в силу однородности $H=(W,Q)$, s ребрам затравки, т.е. степень этой вершины равна $s+1$. Во втором случае вершина v инцидентна только ребрам затравки и, следовательно, ее степень равна s. Таким образом, множество вершин V можно разбить на два подмножества V_1 и V_2, где V_1 составляют вершины, степень которых равна $s+1$, а V_2 составляют вершины, степень которых равна s.

Докажем теперь вторую часть теоремы.

Подмножество V_1 составляют только те вершины, которые инцидентны старому ребру. Используем формулу (1), для вычисления количества старых ребер, $m(n,q,L-1)=q\frac{n^{L-1}-1}{n-1}$ и, учитывая, что каждому старому ребру инцидентны две вершины, получим $|V_1|=2q\frac{n^{L-1}-1}{n-1}$. Т.е. соотношение (2) доказано.

Подмножества V_1 и V_2 образуют разбиение множества V, тогда верно, что $V_2=V\setminus V_1$, а мощность $|V_2|=n^L-|V_1|$. Итак, формула (3) доказана.

Теорема доказана.

Лемма 1. Пусть в предфрактальном графе $G=(V,E)$ две вершины v_1 и v_2, принадлежат одной затравке $H=(W,Q)$ ($v_1, v_2\in W$), и имеют смежность с некоторой вершиной $v\in V$, тогда вершина v, также принадлежит этой затравке H.

Доказательство. Допустим, что $v\in V$ не является вершиной данной затравки $H=(W,Q)$, тогда она принадлежит другой затравке $H'=(W',Q')$, т.е. ребра $e=(v_1,\,v)$ и $e=(v_2,\,v)$ являются старыми.

Заметим, что два старых ребра $e=(v_1,\,v)$ и $e=(v_2,\,v)$ не могут быть инцидентны по обеим вершинам одним и тем же затравкам, в силу того, что кратных ребер в траектории предфрактального графа нет.

Лемма доказана.

Для решения поставленной задачи распознавания предфрактального графа $G=(V,E)$ с непересекающимися старыми ребрами, когда затравка – регулярный граф степени $n-2$ предлагается следующий алгоритм $\boldsymbol{\alpha}_{1}$., состоящий из этапов $r=1,2,...,L-1$, которые взаимнооднозначно соответствуют текущим графам G_l, $l=2,..,L$

траектории (см.[3]). На входе этапа r рассматривается текущий граф G_l, где $l = L - r + 1$. Этап r выделяет в G_l затравки, состоящие из ребер ранга l. После чего, каждая из этих затравок стягивается в вершину. Полученный в результате текущий граф G_{l-1}, представляется на вход этапа $l-1$.

В процессе результативной реализации $L-1$ этапов алгоритма α_1 получаем последовательность $G_L^*, G_{L-1}^*, ..., G_1^*$. При этом считаем, что данный граф G, обозначаемый через G_L^*, является предфрактальным каноническим графом, тогда, когда последовательность имеет длину L. Причем, каждый представитель этой последовательности удовлетворяет необходимым условиям предфрактальности. Выполнение этих условий проверяется в результате реализации всех операций соответствующего этапа.

Опишем вычислительную схему первого этапа в случае, когда на его вход представлен исходный граф $G = (V, E)$.

Этап $r = 1$ начинает свою работу с проверки выполнения равенства $|V| = n^L$. Если это равенство не выполняется, то алгоритм α_1 заканчивает работу безрезультатно. В случае выполнения этого равенства, в графе G выделяется множество V_1, состоящее из вершин степени $s = n-1$, и V_2, состоящее из вершин степени $s = n-2$. Если разность $V \setminus (V_1 \cup V_2) \neq q$, то алгоритм заканчивает работу безрезультатно. В противном случае, V_1 и V_2 образуют разбиение множества V и, дальнейшая работа этапа $r = 1$ состоит из m_0 шагов, где m_0 число таких затравок, каждая из которых состоит из новых ребер.

Результатом каждого такого шага является выделенная в графе G очередная затравка. Процедуру выделения этой затравки обозначим через b.

Описание процедуры b.

Выделяем во множестве V_2 очередную неотмеченную вершину v_1^*, т.е. вершину, которая не принадлежит какой-либо уже выделенной затравке. Т.к. вершина $v_1^* \in V_2$, то она имеет степень $n-2$, т.е. смежна с $n-2$ новыми вершинами своей затравки $H = (W, Q)$, которые обозначаем через v_k^*, где $k = \overline{2, n-1}$ и окрашиваем. В результате имеем $n-1$ выделенных вершин n-вершинной затравки, т.е. непомеченной осталась всего одна вершина. Рассмотрим теперь те вершины, которые смежны с выделенными v_k^*, $k = \overline{2, n-1}$, но неокрашены и, выделим среди них ту которая будет смежной с $n-2$ из уже окрашенных $n-1$ вершин, согласно лемме 1, эта вершина также будет принадлежать этой затравке. Через W' обозначаем множество всех вершин отмеченных процедурой b. Если мощность $|W'| = n$, то выделяем и окрашиваем все ребра, у каждого из которых концы представляют собой вершины данного множества W'. Работа процедуры b завершается проверкой: образует ли множество выделенных таким образом вершин и ребер n-вершинный связный однородный граф степени $s = n-2$. Если да, то шаг, включающий в себя описанную процедуру b, завершается результативно и следует переход к следующему шагу первого этапа. В противном случае, шаг считается безрезультатным и, алгоритм a_1 прекращает свою работу.

Этап $r = 1$ завершается, когда в данном графе $G = (V, E)$ все вершины множества V окажутся отмеченными.

По окончании первой части алгоритма α_1 осуществляем проверку, все ли вершины исходного графа G оказались отмеченными. Если да, то первый этап алгоритма α_1 заканчивает свою работу следующей процедурой. Исходный граф G обозначается через G_L^* и представляется в качестве первого члена последовательности $G_L^*, G_{L-1}^*, ..., G_1^*$. Каждая выделенная затравка графа G стягивается в одну вершину. Полученный в результате такого стягивания граф обозначается через G_{L-1}^*. Далее, по отношению к нему реализуем очередной этап алгоритма.

Теорема 2. Всякий предфрактальный граф $G = (V, E)$, с попарно непересекающимися старыми ребрами и регулярной n-вершинной затравкой $H = (W, Q)$ степени $s = n-2$ является распознаваемым алгоритмом a_1.

Доказательство. Каждая новая затравка ранга L либо сохраняет инцидентность только с $n-2$ старыми ребрами ранга $L-1$, либо с $n-2$ ребрами предыдущего ранга $L-1$ и одному ребру ранга $L-1$, $L-2, ...$ 1. В первом случае, новая затравка имеет две вершины минимальной степени $s = n-2$, в силу непересечения старых ребер. Во втором случае, новая затравка имеет одну вершину степени $s = n-2$. Т.е. мы доказали, что всякая новая затравка имеет хотя бы одну вершину минимальной степени $n-2$, а это обеспечивает распознавание каждой затравки.
Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Емеличев В.А. и др. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990г.

2. Кочкаров А.М., Перепелица В.А. «Метрические характеристики фрактального и предфрактального графа». Сб.РАН САО, 1999г.
3. Кочкаров А.М. Распознавание предфрактальных графов.