

Крупенин В.Л.

Институт машиноведения РАН

Москва, Россия

krupenin@online.ru

Изучаются случайные колебания двумерной конструкции, вибрирующей вблизи системы, плоских абсолютно упругих препятствий, установленных параллельно плоскости статического равновесия конструкции с одной или разных сторон. При ряде предположений с помощью методов диффузионных марковских процессов (ДМП) задача решается точно.

1. Рассмотрим прямоугольную решетку [1], составленную из $N=N_1N_2$ упругих линейных струн, заземленных на концах. Конструкция образована системой прямоугольных ячеек (длины $\Delta_{1,2}$; вершины - точечные абсолютно твердые тела с массами m). Возбуждение осуществляют случайные широкополосные силы (типа белых шумов). Каждая струна (длины $l_{1,2}$, натяжения $-T_{1,2}$) нумеруется индексами $k=1,2,.., N_1$ и $q=1,2,.., N_2$. Динамика решетчатой конструкции описывается посредством N функций прогибов $u_{kq}(t)$. Каждая из функций $u_{kq}(t)$ изменяется вдоль некоторой оси, перпендикулярной плоскости статического равновесия решетки (рис 1).

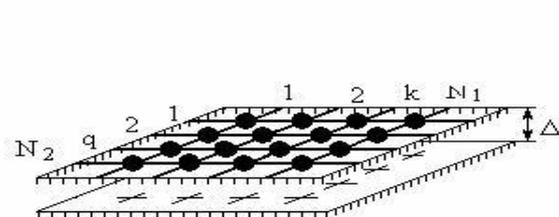


Рис. 1

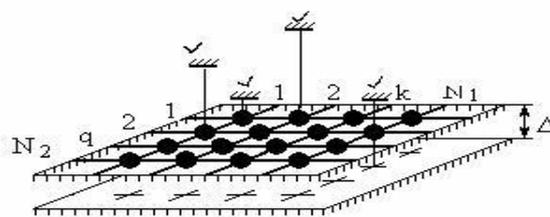


Рис. 2

Параллельно плоскости статического равновесия решетки на расстояниях $\Delta_{1kq}>0$ и $\Delta_{2kq}<0$ от каждого из узлов установлены ограничители хода, с которыми точечные тела, находящиеся в узлах решетки могут совершать абсолютно упругие соударения; удары предполагаются прямыми и центральными. Ограничители могут располагаться произвольно. На рис. 1 показан случай одностороннего ограничителя, представляющего собой прямую стенку. На рис.2 с противоположенной стороны показано несколько прямых ограничителей – помечены штриховкой и «галочками».

Таким образом, если при $t=t^0$ и (или) при $t=t_0$ для каких либо k и q происходит соударение с верхним или нижним ограничителями, то [1]

$$\dot{u}_{kq}(t_0-0) = -\dot{u}_{kq}(t_0+0) < 0, \quad u_{kq}(t_0) = \Delta_{1kq} > 0; \quad \dot{u}_{kq}(t_0-0) = -\dot{u}_{kq}(t_0+0) > 0, \quad u_{kq}(t_0) = \Delta_{2kq} < 0; \quad \Delta_{1kq} \leq u_{kq}(t) \leq \Delta_{2kq}. \quad (1)$$

Пусть вынуждающие силы, действующие на узлы [1], даются случайными некоррелированными широкополосными процессами $\xi_{kq}(t)$ типа белых шумов. Пусть $\langle \xi_{kq} \xi_{rs} \rangle = 2S \delta_{kq} \delta_{rs} \delta(t - t')$; δ_{kq} , δ_{rs} – символы Кронекера ($k, q = 1, 2, \dots, N_1$; $r, s = 1, 2, \dots, N_2$); $\delta(t)$ – δ -функция Дирака. Считая, что координаты $u_{kq}(t)$ отсчитываются от точек, лежащих в плоскости равновесия конструкции, а, также предполагая, что рассеяние энергии пропорционально абсолютным скоростям каждого узла, запишем систему уравнений, описывающую движение решетчатой конструкции в промежутках между соударениями. Так как каждая частица лежит одновременно на двух струнах, то получим N уравнений:

$$m\ddot{u}_{kq} + b\dot{u}_{kq} + c_1(2u_{kq} - u_{(k-1,q)} - u_{(k+1,q)}) + c_2(2u_{kq} - u_{(k,q-1)} - u_{(k,q+1)}) = \xi_{kq}(t); \quad (2)$$

здесь соответственно обозначено: $c_{1,2} = T_{1,2} / \Delta_{1,2}$ – коэффициенты упругости b – коэффициент демпфирования. Граничные условия $u_{kq} = 0$, при $k=0; (N_1+1)$ и $q=0; (N_2+1)$ [1]. Определяющая уравнения движения функция Гамильтона системы (2) $H(u_{kq}; y_{kq})$

$$H(u_{kq}; y_{kq}) = \sum_{(k,q)} \frac{1}{2} y_{kq}^2 + \frac{1}{2} \left[\sum_{(k)} c_1 (u_{k1} - u_{k,N_2})^2 + \sum_{(q)} c_2 (u_{1q} - u_{N_1,q})^2 + \sum_{(k=2)} c_2 (u_{kq} - u_{k,(q-1)})^2 + \sum_{(q=2)} c_1 (u_{1q} - u_{N_1,q})^2 \right] + \dots, \quad (3)$$

где введено обозначение $u_{kq} \equiv u_{kq,t}$. Без ограничения общности положим $m=1$, так что гамильтоновы переменные – (y_{kq}, u_{kq}) .

2. Для описания процесса воспользуемся методами ДМП [1]. Предполагая процесс стационарным, будем искать $2N$ – мерную стационарную плотность вероятностей $p(u_{kq}, y_{kq})$; и запишем уравнение ФПК для уравнений (1) [1]:

$$\sum_{(k,q)} \left[\{H, p\}_{kq} - b \frac{\partial}{\partial y_{kq}} (y_{kq} p) - \frac{1}{2} S \frac{\partial^2 p}{\partial y_{kq}^2} \right] = 0, \quad (4)$$

$\{H, p\}_{kq} \equiv (\partial H / \partial y_{kq})(\partial p / \partial u_{kq}) - (\partial H / \partial u_{kq})(\partial p / \partial y_{kq})$ – скобка Пуассона для узла решетки.

Уравнение (4) необходимо решать с учетом условий (1). Функция $p(u_{kq}(t); y_{kq}(t))$ от $2N$ ($N=N_1 N_2$) переменных, удовлетворяющая (4) и сформулированным ограничениям, описывает известное распределение Гиббса [1], имеющее вид: $p(u_{kq}; y_{kq}) = C \exp\{-(2b/S)[H(u_{kq}; y_{kq})]\}$, $u_{kq} \in X = \{u_{kq} | \Delta_{1kq} \leq u_{kq}(t) \leq \Delta_{2kq}\}$, C – постоянная нормировки. Распределение (4) удовлетворяет всем данным выше условиям. При его посредстве можно полностью и в рамках данной модели точно описать искомый процесс.

Литература

1. Крупенин В.Л. Случайные соударения решетчатой конструкции с периодической структурой и плоским ограничителем хода // ДАН, 2006 – т.2-с. 1-4.