УДК 621

К АНАЛИЗУ ПРОБЛЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Крупенин В.Л.

Институт машиноведения РАН

Москва, Россия

krupenin@online.ru

1. Нелинейные волновые процессы моделируются при помощи нелинейных дифференциальных уравнениях в частных производных. Если ограничится нелинейными аналогами волнового уравнения, то упомянутая модель может быть представлена в виде

$$u_{tt} - c^2u_{xx}=h(u,u_t,u_x,t,x), \qquad (1)$$

h – нелинейная функция, структура которой определяется геометрическими и (или) физическими особенностями задачи. Раскладывая функцию h в ряд, в разных приближениях можно получать модели нелинейных волновых процессов. Нелинейные волновые эффекты весьма многочисленны и многообразны. В частности показывается, что при рассмотрении простейших нелинейных волновых моделей проявляются такие весьма характерные и важные явления как «деформирование» и «опрокидывание» профилей волн.

2. Рассмотрим примеры анализа нелинейных волн в так называемых виброударных системах с распределенными ударными элементами. Обозначим: $u(x,t)$ – искомый прогиб. Пусть расстояние между струной и ограничителем равно Δ; $0<\Delta<1$. Имеем для определенности:

$$u(x,t)\le\Delta<1,\ x\ [-½,½],\ t\ge0. \qquad (1)$$

При реализации в первом соотношении строгого неравенства задача линейна и, ограничиваясь консервативным случаем имеем $\Box u\equiv u_{tt}-u_{xx}=0$. Пусть: $u(\pm½,t)=0$, $u(x,0)=u_0(x)\le0$, $u_t(x,0)=0$.Гладкость функции $u_0(x)$ такова, что (хотя бы в обобщенном смысле) обеспечивается существование и единственность решение задачи Коши в соответствующей линейной системе. При реализации контакта ограничитель действует на струну «от себя» поэтому при $u>0$:

$\Box u \leq 0$ (2)

Условие аналогичное (3) эквивалентно дозвуковому распространению взаимодействий. Потребуем: $\mathrm{supp}\,\Box u \subset \{(x,t);\ u(x,t)=\Delta$, где символ «supp» обозначает носитель обобщенной функции. Считая, что при взаимодействии энергия не теряется, постулируем здесь выполнение, имеющего место в соответствующей линейной системе соотношения, выражающего закон сохранения энергии, т.е. в смысле обобщенных функций $\partial /\partial t(|u_t|+|u_x|)=\partial /\partial x(2u_t u_x)$.Это соотношение постулируется и выражает, в частности, гиротезу удара.:

$$u_t\,(x,\ t-0)=-u_t(x,\ t+0),\ \ (x,t) \in \mathrm{supp}\,\Box u,\ u(x,t)=\Delta. \tag{3}$$

Данные определяют гипотезу удара взаимодействия струны об ограничителем без учета потерь энергии. Данную задачу можно символически записать в виде нелинейного уравнения Клейна – Гордона $\Box u+\Phi(u)=0$, где обобщенная функция $\Phi(u)$ определяется указанными соотношениями.

Постановка задачи о поляризованных колебаниях струны, находящейся, например, в трубе, вполне аналогична. Вместо неравенства (2) имеем двойное неравенство $\Box u \,{}^{\leq}_{\geq} 0$.

3.Постановка задачи о взаимодействии струны с точечным ограничителем принципиально отличается от предыдущих, так как при достижении точечного ограничителя, струна некоторое время покоится на нем и мы имеем в определенном смысле аналог гипотезы об абсолютно неупругом ударе. При этом гипотеза взаимодействия подразумевает, что потери энергии отсутствуют. Обсуждение моделей диссипации энергии в системах с распределенными ударными элементами не проводится.

Пусть в плоскости колебаний струны зафиксирован точечный ограничитель и пусть точка фиксации есть $(0,\Delta)$. Таким образом здесь $u(0,t)\geq\Delta$. Записывая уравнение движения снова в виде нелинейного уравнения Клейна-Гордона, заметим, что при возникновении контакта струны с ограничителем, как отмечалось, ее серединная точка будет некоторое время покоится. Если t_k –начало k-го взаимодействия, а θ_k - его окончание: $u(0,t)=\Delta$, $t\in[t_k,\theta_k]$, то $\Phi(u)=-\Sigma R_k(t)\delta(x)[\eta(t-t_k)-\eta(\theta-\theta_k)]$, где к –индексы по которым проводится суммирование,$\delta(x)$ и $\eta(t)$ – δ-функция Дирака и единичная функция Хевисайда;$R_k(t)= u_x(-0,t) - u_x(+0,t) \geq 0$, $t\in [t_k,\theta_k]$ - сила реакции ограничителя. При реализации строгого неравенства) контакт отсутствует. Действие точечного ограничителя равносильно систематическому дополнительному защемлению (в данном случае - середины) струны.

Подробное изложение данных проблем дано в [1]. (Поддержка РФФИ 05-08-50183).

Литература.

1. Крупенин В.Л. К описанию динамических эффектов, сопровождающих колебания струн вблизи однотавровых ограничителей// ДАН. 2003. № 388 (3). С.31- 38.