ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ КОНВЕКТИВНО-ДИФФУЗИОННОГО ПЕРЕНОСА

Михайлов А.В.

ГОУ ВПО «Тульский государственный университет», Тула, Россия

Для системы векторных уравнений вида: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\overset{\mathbf{r}}{K}+\overset{\mathbf{r}}{D}\right)=f(x)$, где K, D – векторы конвективных и диффузионных слагаемых уравнений, рассматривается следующее преобразование и решение. После дифференцирования и изменения знака левой и правой части, справедлива форма: $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-D+\int\limits_0^x Kdx\right)=-\frac{\partial f}{\partial x}$, которая без труда может быть представлена в виде следующей трехточечной аппроксимации:

$$-2A_J\cdot\left[-D_{i+1}+\int\limits_0^{x_i+\Delta x}K_i dx\right]+4C_J\left[-D_i+\int\limits_0^{x_i}K_i dx\right]-$$
$$-2B_J\left[-D_{i-1}+\int\limits_0^{x_i-\Delta x}K_i dx\right]=-\Delta x\cdot\left[f_{i+1}-f_{i-1}\right], \tag{1}$$

где i – сеточный индекс ячейки в области определения функций; J – номер уравнения.

Обозначая через вектор-столбец $\mathbf{Y}_i$ выражения в квадратных скобках сеточного уравнения (1) и через $\mathbf{F}_i$ – выражения в правой части, получим: $-A_{iJ}\mathbf{Y}_{i-1}+C_{iJ}\mathbf{Y}_i-B_{iJ}\mathbf{Y}_{i+1}=-\mathbf{F}_i$, с граничными условиями:

при i = 0: $C_0\mathbf{Y}_0-B_0\mathbf{Y}_1=-\mathbf{F}_0$, при i = N: $-A_N\mathbf{Y}_{N-1}+C_N\mathbf{Y}_N=-\mathbf{F}_N$.

где A, B, C – квадратные матрицы коэффициентов.

Общая схема алгоритма численного решения системы неоднородных уравнений приводится к последовательности действий схемы метода матричной прогонки. Согласно данной схемы, решение задачи в методе матричной прогонки ищется в виде:

$$\mathbf{Y}_i=\boldsymbol{\alpha}_{i+1}\mathbf{Y}_{i+1}+b_i, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\alpha}$, β – матрица и вектор, составленные из неизвестных коэффициентов прогонки, определяемые рекуррентными зависимостями вида:

$$\boldsymbol{\alpha}_{i+1}=\left(C_i-A_i\boldsymbol{\alpha}_i\right)^{-1}B_i,\quad b_{i+1}=\left(C_i-A_i\boldsymbol{\alpha}_i\right)^{-1}\cdot\left(A_i b_i+\mathbf{F}_i\right). \tag{3}$$

В отличии от известных подходов, алгоритм (2,3) реализуется не для физических переменных задачи, а для их комбинации – выражений в квадратных скобках сеточного уравнения (1), что составляет первый этап вычислительного цикла. Определение искомых функций задачи проводится с применением любой итерационной схемы на втором этапе.