УДК 534

Математическое моделирование динамических систем, взаимодействующих посредством соударений

Крупенин В.Л

Институт машиноведения РАН

Москва, Россия

krupenin@online.ru

Изучаются проблемы, характерные для математического моделирования динамических объектов сложной структуры, взаимодействующих через сильно нелинейные (в данном случае –ударные) силы. Рассматривается семейство стационарных склерономных линейных упруго-вязких систем с полной диссипацией энергии, обозначаемое далее $\mathbf{A}=\{\mathbf{A}_0;\mathbf{A}_1,..\mathbf{A}_N\}$ Каждой из систем $\mathbf{A}_r$ семейства $\mathbf{A}$ отвечает поле перемещений $u_r(x_r,t)\in\mathbf{R}^3$, причем вектора $x_r\in \mathbf{X}_r\subset R^3$ - суть векторные координаты точек систем $\mathbf{A}_r$; $t\in\mathbf{R}$; r=0,1,..,N.Динамика всех членов семейства $\mathbf{A}$ определяется системами матричных операторов динамической податливости [1] $\mathbf{L}^{(r)}(\mathbf{y}_r,\mathbf{x}_r;p)$, где p - оператор дифференцирования. Указанные операторы имеют размерность [3x3] и ставят в соответствие нелинейным силовым полям $\mathbf{f}_r(\mathbf{x}_r,t)$ $[\mathbf{x}_r\in \mathbf{X}_r]$ поля перемещений

$$\mathbf{u}_r(\mathbf{x}_r,t)= \mathbf{L}^{(r)}(\mathbf{y}_r,\mathbf{x}_r;p)\, \mathbf{f}_r(\mathbf{y}_r,t). \qquad (1)$$

Предположим теперь, что каждая из систем $\mathbf{A}_r$ (r=1,...,N) соударяется с системой $\mathbf{A}_0$ следующим образом.

Пусть при $\mathbf{x}_r=\mathbf{x}_{r0}$ в каждой из систем $\mathbf{A}r$ сосредоточено по одному включению, содержащему точечные тела с сосредоточенными массами m_{r0}, и в то же время система $\mathbf{A}_0$ содержит N подобных включений при $\mathbf{x}_0=\mathbf{x}_{0r}$, в которых сосредоточены точечные тела с массами m_{0r}; r=1,...,N. Пусть далее тела с массами m_{r0} могут соударяются с телами с массами m_{0r} соответственно, так что объединенная система (семейство) $\mathbf{A}$ содержит N сосредоточенных ударных пар. Введем относительные координаты $\mathbf{u}_r(t)=\mathbf{u}_0(x_{0r},t)-\mathbf{u}_r(x_{r0},t)$ и обозначим Φ_r силу удара в r-й ударной паре. Тогда можно записать систему из ***(N+1)***-го операторного уравнения движения объединенной системы $\mathbf{A}$ (ср.[1]):

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}_0,t)=L^{(0)}(\mathbf{y}_0,\mathbf{x}_0;p)\{\mathbf{f}_0(y_0,t) - \sum_{r=1}^{N} \Phi_r[\mathbf{u}_r(t), p\mathbf{u}_r(t)]\delta(\mathbf{y}_0-\mathbf{x}_{0r})\};$$

$$\mathbf{u}_r(\mathbf{x}_r,t)= L^{(r)}(\mathbf{y}_r,\mathbf{x}_r;p)\{\mathbf{f}_r(\mathbf{y}_r,t) + \Phi_r[\mathbf{u}_r(t), p\mathbf{u}_r(t)]\delta(\mathbf{y}_r-\mathbf{x}_{r0})\}, \qquad (2)$$

где $\delta(\mathbf{x})$ - δ-функция Дирака; r=1,...,N. Проведя N раз вычитаний второго уравнения (2) из первого уравнения (2), получаем для относительных координат (2) при r=1,...,N

$$\mathbf{u}_r(t)=\mathbf{U}_{r0}(t)-L^{(0)}(\mathbf{x}_{0r},\mathbf{x}_0;p)\sum_{r=1}^{N}\Phi_r[\mathbf{u}_r(t),p\mathbf{u}_r(t)]-L^{(r)}(\mathbf{x}_{r0},\mathbf{x}_r;p)\Phi_r[\mathbf{u}_r(t),p\mathbf{u}_r(t)] \qquad (3)$$

где обозначено: $\mathbf{U}_{r0}(t)=L^{(0)}(\mathbf{y}_0,\mathbf{x}_0;p)\mathbf{f}(y_0,t)-L^{(r)}(\mathbf{y}_r,\mathbf{x}_r;p)\mathbf{f}(\mathbf{y}_r,t)$-изменение относительных координат в отсутствии ударов и введены операторы $L_k(0,r)(p)=L(0)(\mathbf{x}_{0r},\mathbf{x}_{0r};p)$; $L_{0r}(p)=L^{(0)}(\mathbf{x}_{0r},\mathbf{x}_{0r};p)+L^{(r)}(\mathbf{x}_{r0},\mathbf{x}_{r0};p)$.Таким образом соотношения (3) можно для удобства переписать и так:

$$\mathbf{u}_r(t)=\mathbf{U}_{r0}(t)-L_{0r}(p)\Phi_r[\mathbf{u}_r(t),p\mathbf{u}_r(t)]- L^{(0)}(\mathbf{x}_{0r},\mathbf{x}_0;p)\sum_{r=1}^{N}\Phi_k[\mathbf{u}_k(t),p\mathbf{u}_k(t)]\ ,\ k\neq r \qquad (4)$$

Выведенные соотношения - весьма общи, так как моделируют поведение представительного класса линейных между ударами систем. Если необходимые системы операторов динамической податливости и распределения внешних сил заданы, а гипотеза удара, определяющая функции Φ_k - конкретизирована, то, найдя представления относительных координат $\mathbf{u}_{r0}$, можно при помощи соотношений (2) найти перемещения любой точки семейства **A**.

Основной предмет рассмотрений – моделирование периодических режимов движения, анализируются при помощи методов частотно-временного анализа [1]. В частности, изучается модель, цепочки N массивных бусин, расположенных на невесомой струне, колебания каждой из которых ограничивает линейный между соударениями осциллятор:

$$m\ddot{u}_k+c(2u_k-u_{k+1}-u_{k-1})+\Phi_k(u_r,\dot{u}_r)= g_k(u_{k,\dots,}\dot{}t);\ k=1,\dots,N;\ u_0=u_{N+1}=0. \quad (5)$$

Здесь g_k - гладкие неконсервативные силы; Φ_k - сила удара в каждой из N ударных пар; u_r,- относительные координаты. К уравнениям (5) добавим 2N уравнений ударных осцилляторов. Для группы (1) из N «верхних» осцилляторов и для группы (2) из N «нижних» осцилляторов имеем:

$$m_1\ddot{u}_{1j} + c_1u_{1j}+ \Phi_j(u_r,\dot{u}_r)=f_{1j}(u_{1j},\dot{u}_{1j},t)\ ; \quad j=1,\dots,N; \qquad (6)$$

$$m_1\ddot{u}_{2q} + c_1u_{2q}+ \Phi_j(u_r,\dot{u}_r)=f_{2j}(u_{2q},\dot{u}_{2q},t)\ ; \quad q=1,\dots,N. \qquad (7)$$

Для отыскания периодических движений в системе (5) - (7) необходимо перейти к операторным моделям и, посредством методов частотно-временного анализа получить искомые представления через периодические функции Грина линейных систем [1].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 05-08-50183).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах. - М.: Наука, 1985.-320 с.