Численный метод решения математической модели теплопереноса в средах с фрактальной структурой

Бейбалаев В.Д.

Дагестанский государственный университет

Махачкала, ул. Магомеда-Гаджиева 43 «а», e-mail kaspij_03@mail.ru

В настоящее время для решения задач теплопереноса используются как аналитические, так и численные методы. В связи с большими трудностями, возникающими при поиске аналитических решений уравнений с дробными производными, в данной главе предпринимается попытка разработки численного метода его решения.

Унифицированным методом приближенного решения дифференциальных уравнений, применимым для широкого класса уравнений математической физики, является метод конечных разностей (или метод сеток). Результаты моделирования при помощи метода конечных разностей имеют хорошую сходимость с экспериментальными данными. Еще одним достоинством данного метода является простота его реализации и универсальность получаемых программ.

В методе конечных разностей осуществляется переход от непрерывной среды к некоторой ее дискретной ее модели. При таком переходе должны сохраняться основные свойства физического процесса, прежде всего законы сохранения (тепла, массы, энергии и т.д.)

Теплообмен в средах с фрактальной структурой является сложным термодинамическим процессом, протекающим в неоднородной капиллярно-пористой среде. Задача о протекании этого процесса является одной из наиболее сложных задач математической физики. Основная трудность решения указанной задачи заключается в необходимости учета фрактальности среды, изменения агрегатного состояния и теплофизических характеристик среды, взаимной зависимости многих параметров.

Предлагается, не искажая общей физической сущности процессов, в качестве математической модели теплообмена в фрактальных средах использовать обобщенное уравнение теплопроводности, коэффициент которого учитывает выделение и перенос тепла.

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = C(x,t) \cdot \frac{\partial^{a} T(x,t)}{\partial x^{2}} + f(x,t), \qquad (1)$$

где $1 < a \le 2$, $T(x,0) = j(x)$, $C(x,t) \ge 0$, $x \in [a,b]$.

Здесь $T(x,t)$ – температура, $C(x,t)$ – коэффициент теплопроводности, $f(x,t)$ – удельная плотность тепловыделения за счет внутренних источников. Предлагаемая математическая модель учитывает: фрактальность среды; плотностные свойства; теплофизические свойства.

Методов нахождения решения данной математической модели в аналитическом виде не существуют. Применим для нахождения решения метод конечных разностей.

Построим для уравнения (1) конечно- разностную схему. Разбиваем отрезок [$a,в$] на N равных частей точками $a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_N = в$. Тогда $x_i = a + i \cdot h,$ где $h = (в - a)/N$, а $t_n = n \cdot \Delta t$, $0 \le t_n \le T_0$.

Представим производную $\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$ в виде конечной разности на отрезке$[t_n, t_{n+1}]$

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T(x,t_{n+1}) - T(x,t_n)}{\Delta t} \qquad (2)$$

Подставляя (2) в уравнение (1) получим:

$$\frac{T(x,t_{n+1}) - T(x,t_n)}{\Delta t} \approx C(x,t_n) \cdot \frac{\partial^{a} T(x,t_n)}{\partial x^{a}} + f(x,t_n) + 0(\Delta t) \qquad (3)$$

Для дробной производной $\frac{\partial^a T(x,t_n)}{\partial x^a}$ при $1 < a \le 2$ имеет место формула (2):

$$\frac{d^a u(x)}{\partial x^a} = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{h^a} \sum_{k=0}^{M} q_k \cdot f[x-(k-1)\cdot h],$$

где $q_0 = 1,\qquad q_k = (-1)^k \cdot \frac{a\,(a-1)...(a-k+1)}{k!},$ тогда

$$\frac{\partial^a \cdot (x,t)}{\partial x^a} = \frac{1}{h} \cdot \sum_{k=0}^{M} q_k \cdot T[x-(k-1)\cdot h, t] + 0(h). \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (3) вместо дробной производной и введя следующие обозначения $T_i^n = T(x_i, t_n),\qquad C_i^n = C(x_i, t_n),\qquad f_i^n = f(x_i, t_n),$ получим:

$$\frac{T_i^{n+1} + T_i^n}{\Delta t} \approx \frac{C_i^n}{h^a} \sum_{k=0}^{i+1} q_k\, T_{i-k+1}^n + f_i^n, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

После преобразований примет вид:

$$T_i^{n+1} = b \cdot C_i^n q_0 \cdot T_{i+1}^n + (1 + b \cdot C_i^n q_1) T_i^n + b\, C_i^n \sum_{k=1}^{i+1} q_k T_{i-k+1}^n + f_i^n \cdot \Delta t \qquad (5)$$

Доказана устойчивость разностной схемы (5) при условии $\frac{\Delta t}{h^a} \le \frac{1}{a \cdot C_{\max}}$, где $C_{\max} = \max\limits_{\substack{a \le x \le в \\ 0 \le t \le T_0}} [C(x,t)].$

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и Техника, 1987г.
2. E. Isaacson, H.B. Keller, Analysis of Numerical Methods, Wiley, New York, 1966г.
3. Э. М. Кольцова, В.А. Василенко, В.В. Тарасов, Численные методы решения уравнений переноса во фрактальных средах, Ж.Ф.Х, 2000г.