УДК 534

АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ В ПРИСУТСТВИИ ШИРОКОПОЛОСНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Крупенин В.Л.

Институт машиноведения РАН

Москва, Россия

krupenin@online.ru

Изучаются сильно нелинейные динамические эффекты в автоколебательных системах с одной степенью свободы, на которые наложены дополнительные условия разрыва производных типа условий удара. В ряде случаев, как правило, неучитываемые случайные возмущающие факторы могут оказать на динамику системы существенное влияние.

1. Рассмотрим динамическую систему с разрывами скорости [1, 2].Пусть соответственно $\dot{x}_+$ и $\dot{x}_-$ - скорости тела непосредственно после и до разрывов. Легко переписать уравнение (1) в виде

$$\ddot{x}+\Omega^2 x-a\,\dot{x}+b\,\dot{x}^3=0,\quad a,\,b>0;\quad \dot{x}_+=-\dot{x}_-,\quad |x|\le\Delta \tag{1}$$

где Ω^2– собственная частота линейного осциллятора, a и b - параметры «автоколебательного члена», производная решения имеет разрыв при выполнении условия $|x|=\Delta$. отнесенные к массе колеблющегося тела. Пусть величина Δ<<1. В этом случае система оказываются псевдоконсервативной [3] и легко получить точные решения (1). Пренебрегая в сравнении с остальными, членом Ω^2x, понизим порядок системы (2). Пусть $z\equiv\dot{x}$. Тогда

$$\dot{z}-a\,z+b\,z^3=0\,,\ z_+=-z_-. \tag{2}$$

Отсюда получаем три стационарных решения:

$$z_1=0;\quad z_2=-\sqrt{a/b}\,,\ z_3=\sqrt{a/b}\,. \tag{3}$$

Второе соотношение (3) «сшивает» решения: $z_2=z_-$ и $z_3=z_+$., период колебаний $T=2\Delta\sqrt{b/a}$.

В результате, при переходе к исходной координате x получается хорошо известное [1, 2] «пилообразное» колебательное решение, «амплитуда», которого определяется величиной $0{,}5\sqrt{a/b}$: $x(t)=0{,}5\sqrt{a/b}\,(t-0{,}25T)$, причем при такой записи здесь T∈ [0, 0,5T[, а далее выражение для x(t) необходимо продолжить на всю числовую ось, исходя из условий периодичности и симметрии: $x(t+T)= x(t)$; $x(t+0{,}5T)= - x(t)$.

2. Рассмотрение задач подобного типа, когда происходит пренебрежение собственной упругостью системы, позволяет изучить их в более общих постановках, например, учесть наличие широкополосных случайных флуктуаций.

Пусть автоколебания осуществляются также при наличии внешней силы, которая может быть описана стандартным белым шумом $x(t)$ интенсивности S. Имеем:

$$\ddot{x} - a\dot{x} + b\dot{x}^3 = x(t) \quad a, b > 0;\ \dot{x}_+ = -\dot{x}_-, \tag{4}$$

и положение равновесия здесь снова неустойчиво. Введем новую переменную – (энергию): $E=0{,}5x^2$. Имеем:

$$\dot{E} - 2aE + 4bE^2 = \sqrt{2E}\,x(t).$$

Стационарное уравнение ФПК для этой задачи имеет вид [1]:

$$S\frac{d}{dE}[EP(E)] = (2aE - 4bE^3 + 0{,}5S)\,P(E),$$

где $P(E)$ - искомая плотность вероятностей. Решение :

$$P(E) = \frac{2C}{\sqrt{2E}}\exp\left(\frac{2a}{S}E - \frac{2b}{S}E^2\right),\ E>0. \tag{5}$$

Константа C находится из условия нормировки. Принимая во внимание (см. [1, 2]), что

$$\int_0^\infty x^{a-1}\exp(-bx^2-g\,x)dx = (2b)^{-a/2}\Gamma(a)\exp(g^2/8b)D_{-a}(g/\sqrt{2b}),$$

где $\Gamma(a)$ – Γ-функция Эйлера, а $D_{-a}(y)$ – функция параболическая цилиндра [1 ,2], получаем после преобразований с учетом свойств означенных специальных функций:

$$C= (4b/S)^{0,25}\exp[-a^2/(4bS)]\,\{\sqrt{2p}\,D_{-0,5}(-a/\sqrt{bS})\}^{-1}.$$

Найденная плотность вероятности определяет точное решение задачи.

Отсюда получаем важнейшие характеристики процесса. Для плотности вероятности импульса

$$J=2|\dot{x}_-|;\ E=1/8\,J^2$$

в соответствии с правилами вычисления плотностей вероятностей детерминированных функцийслучайных процессов , найдем:

$$P(J) = C\exp(\frac{a}{4S}J^2 - \frac{b}{32S}J^4),\ J \geq 0.$$

Легко показать, что мода этого распределения отвечает устойчивому стационарному виброударному процессу в соответствующей детерминированной системе. Найденные распределения позволяют досконально исследовать задачу.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (Проект 05-08-50183).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах.-М., Наука, 1985. – 384 с.

2. V.I. Babitsky, V.L. Krupenin Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. –404 p.p.

3. Крупенин В.Л К расчету псевдоконсервативных авторезонансных систем // Проблемы машиностроения и надежности машин, 1993 г., N2, с. 106-114