

К ВОПРОСУ О МОДЕЛИРОВАНИИ ОТКАЗОУСТОЙЧИВЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ СЕТЕЙ ПЕТРИ-МАРКОВА¹

Е.В. Ларкин, В.В. Котов, Н.А. Котова, В.А. Соколов

Одной из основных при математическом моделировании отказов/восстановлений, как последовательности случайных событий, является задача установления математического подобия между временными и вероятностными характеристиками реального процесса и его аналитической модели, причем при построении моделей процессов в сложных системах должны отражаться также структурные и логические аспекты отказов [1]. Естественной моделью для описания случайной последовательности смены состояний некоторого объекта во времени является марковский, а в более общем случае – полумарковский процесс [2, 3]. Однако наличие взаимосвязей в достаточно сложной системе приводит к необходимости учета взаимодействия элементарных полумарковских процессов и формирования единого случайного процесса, учитывающего не только смену состояний отдельных элементов моделируемой системы, но и весь комплекс взаимодействий между элементами.

Идеальным инструментарием для анализа взаимодействия процессов являются сети Петри [4, 5], однако, являясь асинхронными по определению, модели указанного типа позволяют лишь ответить на вопросы о принципиальной достижимости состояний системы, соответствующих заданным требованиям. Спрогнозировать моменты переключения в указанные состояния с помощью сетей Петри, в их классической интерпретации, затруднительно. Кроме того, ограничения в моделировании параллельных процессов с помощью сетей Петри заключаются в ограниченности логических условий продолжения процессов элементарной конъюнкцией, что не учитывает всего многообразия взаимодействий элементов в реальных сложных системах.

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований

Объединение двух подходов к моделированию отказов в сложных системах порождает сеть Петри-Маркова (СПМ), которая представляет собой структурно-параметрическую модель, заданную множеством:

$$Y = \{P, M\}, \quad (1)$$

где P – описание структуры двудольного графа, представляющего собой сеть Петри; M – описание параметров, накладываемые на структуру P , и определяющих временные, вероятностные и логические характеристики СПМ.

Структура СПМ характеризуется множеством:

$$P = \{A, Z, I_A(Z), O_A(Z)\}, \quad (2)$$

где $A = \{a_{1(a)}, \dots, a_{j(a)}, \dots, a_{J(a)}\}$ – конечное множество позиций (в [4] вместо термина «позиция» употребляется термин «место»); $Z = \{z_{1(z)}, \dots, z_{j(z)}, \dots, z_{J(z)}\}$ – конечное множество переходов; $I_A(Z) = \{I_A(z_{1(z)}), \dots, I_A(z_{j(z)}), \dots, I_A(z_{J(z)})\}$ и $O_A(Z) = \{O_A(z_{1(z)}), \dots, O_A(z_{j(z)}), \dots, O_A(z_{J(z)})\}$ – соответственно входная и выходная функции переходов; $J(a)$ – общее количество позиций; $J(z)$ – общее количество переходов.

В контексте задачи моделирования процесса отказов/восстановлений:

позиции множества $A = \{a_{1(a)}, \dots, a_{j(a)}, \dots, a_{J(a)}\}$ являются математическим подобием состояний элементов системы;

переходы множества $Z = \{z_{1(z)}, \dots, z_{j(z)}, \dots, z_{J(z)}\}$ моделируют взаимодействие элементов при переключениях системы из одного состояния в другое, при этом во временной области взаимодействие может рассматриваться как «соревнование» отказов/восстановлений, исходом которого является переключение системы в одно из возможных сопряженных состояний;

входная функция перехода $I_A(z_{j(z)}) = \{a_{1[I, j(z)]}, \dots, a_{j[I, j(z)]}, \dots, a_{J[I, j(z)]}\} \subset A$ моделирует множество состояний, участвующих в «соревновании», ($J[I, j(z)]$ – общее количество позиций, составляющих входную функцию $I_A(z_{j(z)})$ перехода $j(z)$);

выходная функция перехода $O_A(z_{j(z)}) = \{a_{1[O, j(z)]}, \dots, a_{j[O, j(z)]}, \dots, a_{J[O, j(z)]}\} \subset A$ моделирует множество исходов «соревнований» отказов/восстановлений элементов ($J[O, j(z)]$ – общее количество позиций, составляющих входную функ-

цию $O_A(z_{j(z)})$ перехода $j(z)$.

Параметрические аспекты M сети Петри-Маркова описываются следующим множеством:

$$M = \{q, p, f(t), L\}, \quad (3)$$

где $q = [q_{1(z)}, \dots, q_{j(z)}, \dots, q_{J(z)}]$ – вектор, определяющий вероятность начала процесса в одном из переходов множества Z ; $p = [p_{j(a)j(z)}]$ – матрица с количеством элементов $J(a) \times J(z)$, определяющая априорные вероятности участия $j(a)$ -го элемента в одном из возможных «соревнований» $z_{j(z)}$; $f(t) = [f_{j(a)j(z)}(t)]$ – матрица с количеством элементов $J(a) \times J(z)$, определяющая плотности распределения времени t пребывания процесса в состоянии $a_{j(a)}$ при участии в «соревновании» $z_{j(z)}$; $L = [L_{i(z)i(a)}]$ – матрица с количеством элементов $J(z) \times J(a)$, определяющих логические условия окончания взаимодействий, с последующим переключением в состояния множества $O_A(z_{j(z)})$; $L_{i(z)i(a)}$ – элементы матрицы логических условий, равные

$$L_{j(z)j(a)} = \begin{cases} L\{S[a_{i(a)} \in I_A(z_{j(z)}), z_{j(z)}]\}, & \text{если } a_{j(a)} \in O_A(z_{j(z)}); \\ 0, & \text{если } a_{j(a)} \notin O_A(z_{j(z)}); \end{cases} \quad (4)$$

$L\{\dots\}$ – некоторая логическая функция; $S[a_{i(a)} \in I_A(z_{i(a)}), z_{i(z)}]$ – полушаг, под которым понимается логическая переменная, принимающая значения

$$S[a_{i(a)} \in I_A(z_{j(z)}), z_{j(z)}] = \begin{cases} 1, & \text{если в } j(z) \text{ - м "соревновании" сделан} \\ & \text{полушаг из } j(a) = \text{й позиции в } j(z) = \text{й переход;} \\ 0, & \text{если в } j(z) \text{ - м "соревновании" не сделан} \\ & \text{полушаг из } j(a) = \text{й позиции в } j(z) = \text{й переход.} \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, полушаги в СПМ являются функциональным подобием потока событий отказов/восстановлений в системах исследуемого класса. Полушагом $S_{i(a)j(z)} = S[a_{i(a)} \in I_A(z_{i(a)}), z_{i(z)}]$ или $S_{i(z)j(a)} = S[z_{i(z)}, a_{j(a)} \in O_A(z_{i(a)})]$ называется переключение состояния СПМ, при котором из позиции $a_{i(a)} \in I_A(z_{j(z)})$ попадают переход $z_{j(z)}$, или из перехода $z_{j(z)}$ попадают в позицию $a_{j(a)} \in O_A(z_{j(z)})$. Два последовательных полушага образуют шаг.

Переходы $z_{j(z)}$ СПМ разделяются на примитивные и непримитивные. Примитивным называется переход $z_{j(z)}$, для входной и выходной функций которого

выполняются условия:

$$|I_A(z_{j(z)})| = |O_A(z_{j(z)})| = 1, \quad (6)$$

где $|...|$ – мощность соответствующего множества.

Если $z_{j(z)}$ – примитивный переход и $a_{i(a)} \in I_A(z_{j(z)})$, $a_{j(a)} \in O_A(z_{j(z)})$, то $I_{j(z)j(a)} = [a_{i(a)}, z_{j(z)}]$.

Все остальные типы переходов являются непримитивными. Непримитивные переходы (НП) образуют подмножество $Z_{zn} = \{z_{1(zn)}, \dots, z_{j(zn)}, \dots, z_{J(zn)}\} \subset Z$, которое, в свою очередь, может быть разделено на подмножества поглощающих, синхронизирующих и стартовых переходов.

Поглощающим, или конечным называется НП $Z_E = \{z_{1(E)}, \dots, z_{j(E)}, \dots, z_{J(E)}\} \subset Z_{zn}$, для выходной функции которого выполняется условие

$$O_A(z_{j(E)}) = \emptyset, \quad (7)$$

где $\emptyset = \{\}$ – пустое множество.

Для поглощающего перехода $z_{j(z)}$ для всех $j(a) I_{j(z)j(a)} = 0$.

Стартовым или синхронизирующим может быть любой НП $z_{j(zn)}$, для которого выполняется условие $z_{j(zn)} \notin Z_E$.

Если стартовый переход $z_{j(z)}$ не является одновременно синхронизирующим, то $I_A(z_{j(z)}) = \emptyset$ и $I_{j(z)j(a)} = 1$ для всех $a_{j(a)} \in O_A(z_{j(z)})$.

Подсетью

$$P_{j(n)} = \{A_{j(n)}, Z_{j(n)}, I_A(Z_{j(n)}), O_A(Z_{j(n)})\} \quad (8)$$

СПМ (2) называется сеть, для которой $A_{j(n)} = \{a_{1[a,j(n)]}, \dots, a_{j[a,j(n)]}, \dots, a_{J[a,j(n)]}\} \subseteq A$, $Z_{j(n)} = \{z_{1[z,j(n)]}, \dots, z_{j[z,j(n)]}, \dots, z_{J[z,j(n)]}\} \subseteq Z$, $I_A(Z_{j(n)}) \subseteq I_A(Z)$, $O_A(Z_{j(n)}) \subseteq O_A(Z)$.

Подсеть (8) также является двудольным ориентированным графом. Заменяем дуги $(a_{j[a,j(n)]}, z_{j[z,j(n)]})$ и $(z_{j[z,j(n)]}, a_{j[a,j(n)]})$, $a_{j[a,j(n)]} \in A_{j(n)}$, $z_{j[z,j(n)]} \in Z_{j(n)}$, $1[a, j(n)] \leq j[a, j(n)] \leq J[a, j(n)]$, $1[z, j(n)] \leq j[z, j(n)] \leq J[z, j(n)]$ двудольного графа (8) на ребра $\{a_{j[a,j(n)]}, z_{j[z,j(n)]}\}$ и $\{z_{j[z,j(n)]}, a_{j[a,j(n)]}\}$. Тогда подсеть (8) будет называться связной подсетью, если между двумя произвольными различными вершинами множества $A_{j(n)} \cup Z_{j(n)}$, независимо от их типа (позиция или переход), существует хотя бы один путь.

Пусть структура подсети (8) такова, что в ней кроме примитивных существует также подмножества переходов $Z_{j(n),B} = \{z_{1[z,j(n),B]}, \dots, z_{j[z,j(n),B]}, \dots, z_{J[z,j(n),B]}\} \subset Z_{j(n)}$ и $Z_{j(n),E} = \{z_{1[z,j(n),E]}, \dots, z_{j[z,j(n),E]}, \dots, z_{J[z,j(n),E]}\} \subset Z_{j(n)}$, для которых

$$I_A(z_{j[z,j(n),B]}) \cap A_{j(n)} = \emptyset, |O_A(z_{j[z,j(n),B]}) \cap A_{j(n)}| = 1; \quad (9)$$

$$O_A(z_{j[z,j(n),E]}) \cap A_{j(n)} = \emptyset, m[I_A(z_{j[z,j(n),E]}) \cap A_{j(n)}] = 1. \quad (10)$$

Связная подсеть (8), у которой множество переходов $Z_{j(n)}$ разбивается на непересекающиеся подмножества, для которых справедливы свойства (6), (9) или (10) называется элементарной подсетью Петри-Маркова (ЭППМ). Функциональным подобием переключений внутри ЭППМ является процесс отказов и восстановлений единственного элемента системы, рассматриваемого без взаимодействия с другими элементами. Переходы $z_{j[z,j(n),B]} \in Z_{j(n),B}$ являются стартовыми переходами ЭППМ $\Pi_{j(n)}$, они моделируют начало эксплуатации элемента. Переходы $z_{j[z,j(n),E]} \in Z_{j(n),E}$ являются конечными переходами ЭППМ $\Pi_{j(n)}$, они моделируют отказные ситуации. Остальные переходы являются примитивными и моделируют переход элемента от состояния функционирования в составе системы более высокого уровня в состояние восстановления после отказа, или из состояния восстановления в состояние функционирования.

Для всех ЭППМ, моделирующих процесс отказов/восстановлений, в дополнение к условиям связности, можно потребовать выполнения условия достижимости хотя бы одного перехода подмножества $Z_{j(n),E}$ из любого перехода подмножества $Z_{j(n),B}$

В общем случае структура СПМ Π может быть представлена в виде объединения ЭППМ $\Pi_{i(n)}$

$$\Pi = \bigcup_{j(n)=1}^{J(n)} \Pi_{j(n)}. \quad (11)$$

Объединение пересечений ЭППМ является подмножеством синхронизирующих переходов множества непримитивных переходов всей сети Z_{zn} :

$$\begin{aligned} Z_{zn} &= \{Z_{1(zn)}, \dots, Z_{j(zn)}, \dots, Z_{J(zn)}\} \supseteq \\ &\supseteq \{Z_{1(n)} \cap Z_{2(n)}, \dots, Z_{j(n)} \cap Z_{k(n)}, \dots, Z_{J(n)-1} \cap Z_{J(n)}\} = \end{aligned}$$

$$= \bigcup_{j(n)=1}^{J(n)} \bigcup_{k(n)=j(n)+1}^{J(n)} \Pi_{j(n)} \cap \Pi_{k(n)}. \quad (12)$$

Полное множество непримитивных переходов формируется в результате объединения подмножества $\{Z_{1(n)} \cap Z_{2(n)}, \dots, Z_{j(n)} \cap Z_{k(n)}, \dots, Z_{J(n)-1} \cap Z_{J(n)}\}$ с подмножеством Z_E и тех из начальных, или стартовых переходов Z_B , для которых выполняется условие $I_A(Z_B) = \emptyset$, т.е.

$$Z_{zn} = Z_E \cup Z_B \cup \bigcup_{j(n)=1}^{J(n)} \bigcup_{k(n)=j(n)+1}^{J(n)} \Pi_{j(n)} \cap \Pi_{k(n)}.$$

Общее количество ЭППМ, $J(n)$, равно количеству элементов, формирующих отказоустойчивую систему на данном уровне иерархии.

Следует особо отметить, что структура СПМ, моделирующей отказоустойчивую систему, мало походит на структуру моделируемого объекта. Поэтому при исследовании отказоустойчивости сложных систем рекомендуется при формировании модели отказов/восстановлений учитывать влияние отказов элементов на их возможные последствия для системы в целом. Причинно-следственный анализ отказов отдельных элементов слабо формализуется и традиционно является частью деятельности экспертов в конкретной предметной области. Для проведения подобного анализа необходимо иметь полный комплект конструкторской документации и детальное описание нормального процесса функционирования элементов и системы в целом. Указанные документы дают исходный материал для построения структурно-параметрической модели процесса отказов/восстановлений в системе.

Поясним подход к моделированию на примере. Пусть система состоит из двух физических элементов e_1 и e_2 , в результате функционирования которых они могут перейти в состояния возникновения перемежающегося отказа (сбоя), состояния отказа, допускающего восстановление, состояние отказа, не допускающего восстановления. В результате ремонта элементу может быть нанесен непоправимый ущерб, или он может быть переведен в работоспособное состояние. Система становится неработоспособной в случае неработоспособности

обоих элементов. Структура системы и СПМ, ее моделирующей приведены на рис. 1.

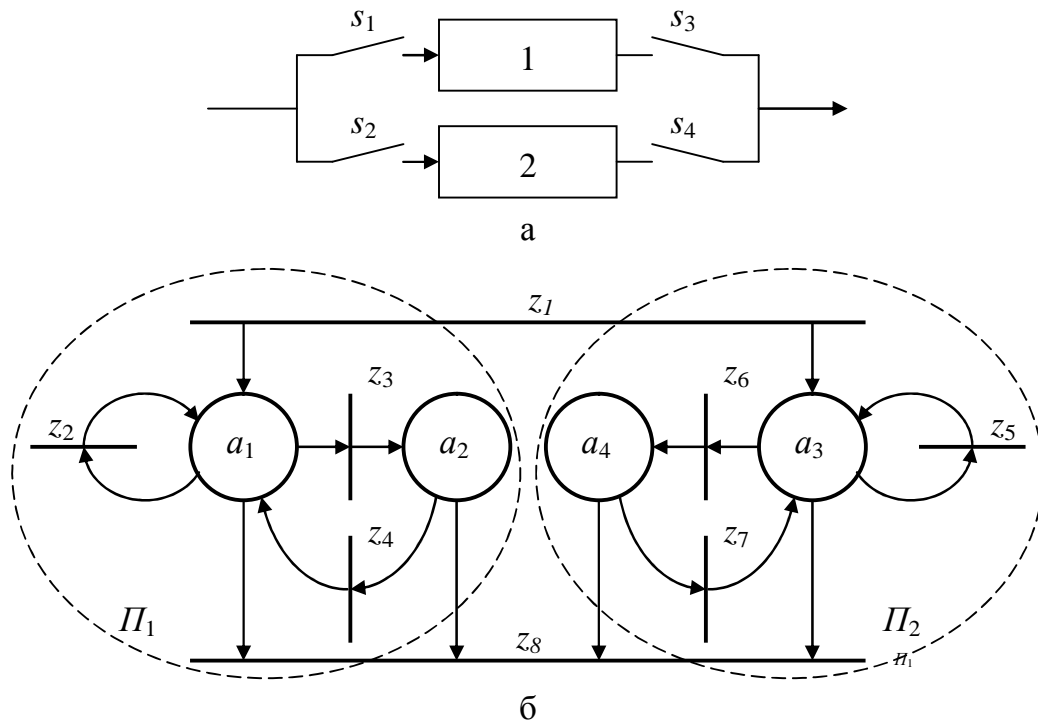


Рис. 1. Система из двух элементов (а) и СПМ, ее моделирующая (б)

На рис. 1 а: 1 и 2 – элементы системы, s_1, s_2, s_3, s_4 – переключатели, позволяющие производить отключение элемента на время проведения ремонтных работ. На рис. 1 б: Π_1 и Π_2 – соответственно, ЭППМ, моделирующие процессы в первом и втором элементах; a_1, a_3 – позиции, моделирующие процесс функционирования первого и второго элементов, соответственно; a_2, a_4 – позиции, моделирующие процесс восстановления первого и второго элементов, соответственно; z_1 – стартовый переход; z_2, z_5 – переходы, моделирующие возникновение перемежающегося отказа (сбоя), в первом и втором элементах, соответственно; z_3, z_6 – переходы, моделирующие возникновение отказов, поддающихся восстановлению в первом и втором элементах, соответственно; z_4, z_7 – переходы, моделирующие момент возврата первого и второго элементов, соответственно, в работоспособное состояние.

Структура СПМ описывается множеством

$$P = \{ \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}, \{\{\}, \{a_1\}, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_3\}, \{a_4\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}\}, \{\{a_1, a_3\}, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1\}, \{a_3\}, \{a_4\}, \{a_3\}, \{a_1\}, \{\}\}\}.$$

Вектор начала процесса имеет вид (процесс с вероятностью единица начинается в переходе z_1)

$$q = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Матрицы вероятностей и плотностей распределения имеют вид:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{18} \\ 0 & 0 & 0 & p_{24} & 0 & 0 & 0 & p_{28} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{35} & p_{36} & 0 & p_{38} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{47} & p_{48} \end{pmatrix};$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} x(t) & f_{12}(t) & f_{13}(t) & x(t) & x(t) & x(t) & x(t) & f_{18}(t) \\ x(t) & x(t) & x(t) & f_{24}(t) & x(t) & x(t) & x(t) & f_{28}(t) \\ x(t) & x(t) & x(t) & x(t) & f_{35}(t) & f_{36}(t) & x(t) & f_{38}(t) \\ x(t) & x(t) & x(t) & x(t) & x(t) & x(t) & f_{47}(t) & f_{48}(t) \end{pmatrix},$$

где $x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(t - t)$ (срабатывание в бесконечности); $d(t)$ – d -функция Дирака.

Матрица логических условий имеет вид:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ [a_1, z_2] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [a_1, z_3] & 0 & 0 \\ [a_2, z_4] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [a_3, z_5] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [a_3, z_6] \\ 0 & 0 & [a_4, z_7] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Библиографический список

1. Ушаков И.А. Вероятностные модели надежности информационно-вычислительных систем. – М.: Радио и связь, 1991. – 132 с.
2. Ярлыков М.С., Миронов М.А. Марковская теория оценивания случайных процессов. – М.: Радио и связь, 1993. – 460 с.

3. Сильвестров Д.С. Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний. – М.: Сов. радио, 1980. – 272 с.
4. Котов В.Е. Сети Петри. – М.: Наука, 1984. – 160 с.
5. Лескин А.А., Мальцев А.М., Спиридонов А.М. Сети Петри в моделировании и управлении. – Л.: Наука, 1989. – 135 с.