О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

*****Еленская Е. Ю.
Пермский государственный университет, г. Пермь, Россия
matan@psu.ru

В теоремах существования неподвижных точек оператора, действующего в некотором пространстве, обычно требуется непрерывность этого оператора. Известны также условия существования неподвижных точек, в которых непрерывность оператора не требуется. Такие условия даются, например, в одной из систем условий теоремы 4.1 работы [2]. Изложим обобщение варианта этой теоремы, в котором непрерывность оператора заменяется непрерывностью его слева.

Пусть X – банахово пространство, $\le$ - полуупорядоченность, порождённая конусом К.

Определение. Оператор $A: M \to X$ $(M \subset X)$ назовем непрерывным в точке $x \in M$ слева, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset M$, $x_n \to x$, $x_n \le x$ выполняется $Ax_n \to Ax$.

Теорема 1. Пусть

1) X – банахово пространство, К – правильный конус, $\le$ - полуупорядоченность, порожденная конусом К,

2) $u, v \in X$, $u \le v$, $<u,v>$ - конусный отрезок, $A: \langle u, v\rangle \to X$, $Au \ge u$, $Av \le v$,

3) A – монотонен и непрерывен слева на $<u,v>$.

Тогда существует хотя бы одна неподвижная точка оператора A на конусном отрезке $<u,v>$.

В условиях этой теоремы оператор A может быть разрывным. Укажем одно из возможных приложений этой теоремы к нелинейным интегральным операторам.

Теорема 2. Пусть

1) k: $[a,b] \times [a,b] \to \mathbf{R}$, где $a,b \in \mathbf{R}$, $a<b$; k непрерывна;
2) существует такая непрерывная, не равная тождественно нулю функция $y: [a,b] \to \mathbf{R}$, $y\{t\} \ge 0$ при $t \in [a,b]$, что $k(t,s) \ge y(t)k(\tau,s)$ при $t,s \in [a,b]$;
3) $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, не убывает и непрерывна слева
4) $\dfrac{f(x)}{x} \to +\infty$ при $x \to 0$; $\dfrac{f(x)}{x} \to 0$ при $x \to +\infty$.

Тогда существует хотя бы одна неподвижная точка интегрального оператора A, определенного равенством $(Ax)(t) = \int_a^b k(t,s) f(x(s)) ds$ $(t,s \in [a,b])$, в пространстве $C[a,b]$.

Таким образом, приведённые теоремы позволяют отказаться от достаточно жёсткого условия непрерывности нелинейного оператора и заменить его непрерывностью слева. Это обобщение можно применить к исследованию краевых задач для нелинейных интегральных операторов.

Литература:

1. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 2002.
2. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962.