

# ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ПАРНОЙ РЕГРЕССИИ ОТ ПАРАМЕТРОВ ФУНКЦИИ ВЕЙЕРШТРАССА-МАНДЕЛЬБРОТА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ЕЕ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Седелъников А.В., Подлеснова Д.П., Ярош Н.С.

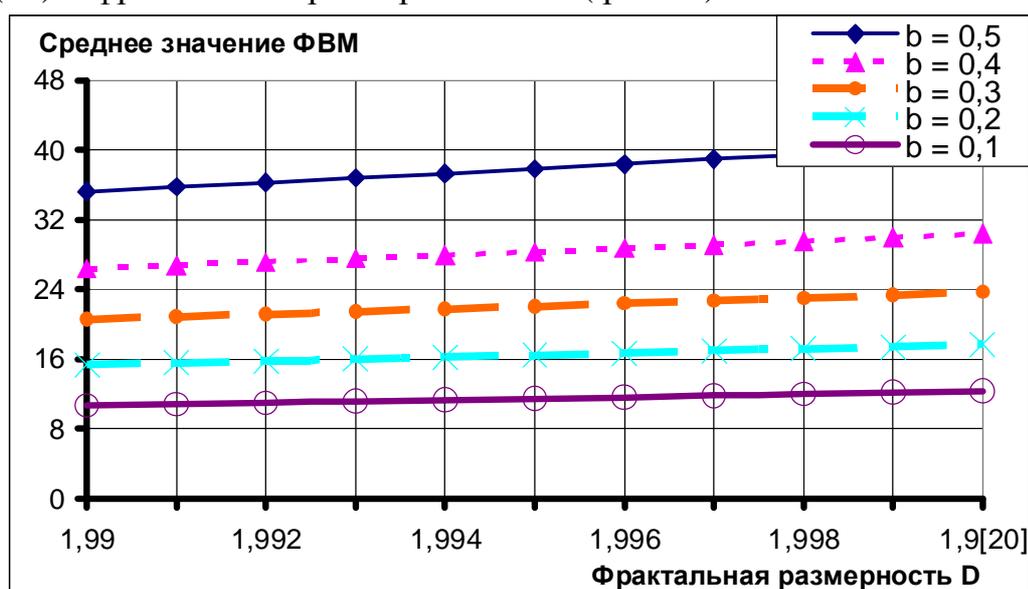
*Институт энергетики и транспорта  
Самарского государственного аэрокосмического университета, Самара*

axe\_backdraft@inbox.ru

**Введение.** При моделировании микроускорений с помощью действительной части фрактальной функции Вейерштрасса-Мандельброта ( ФВМ ) [1]:

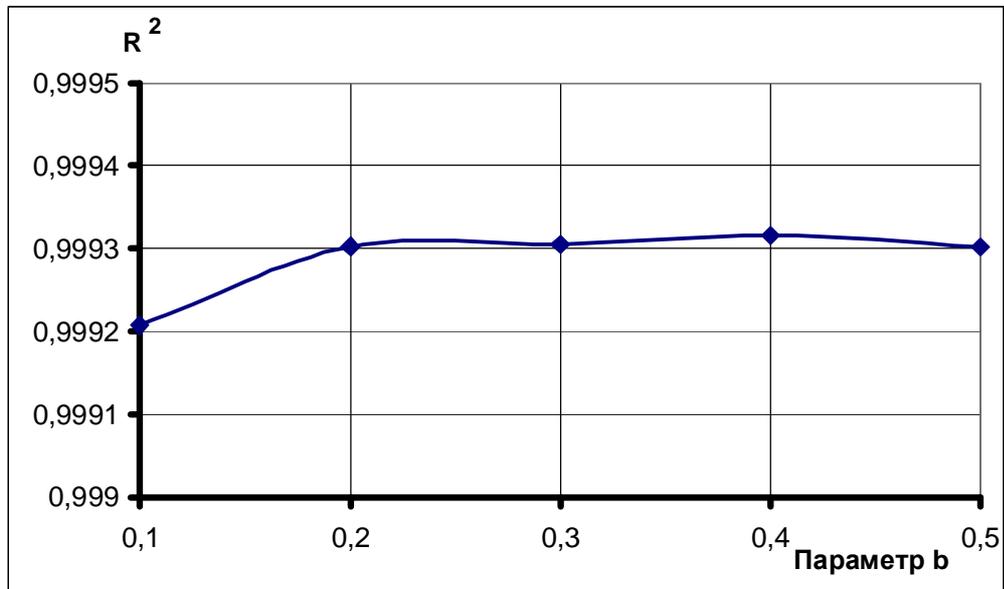
$$\text{Re}W(t) = C(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos b^n t}{b^{(2-D)n}} \quad (1)$$

важно грамотно провести отождествление параметров функции ( 1 ) и реальных условий процесса возникновения поля микроускорений внутри КА. Этой теме, равно как и возможности использования ФВМ в виде ( 1 ) при тождественно равной нулю случайной фазе, посвящен ряд работ [2-5], с которыми можно ознакомиться для понимания решаемой задачи. В работе [4] были получены корреляционные зависимости между средним значением ФВМ ( 1 ) и фрактальной размерностью D ( рис. 1 ).



**Рис. 1. – Динамика изменения среднего значения ФВМ**

Как видно из рис. 1, они практически линейны. Этот факт доказывается с помощью коэффициента детерминации, который при оценке качества моделирования корреляционных зависимостей рис. 1 во всех случаях превышает 0,999 ( рис. 2 ).



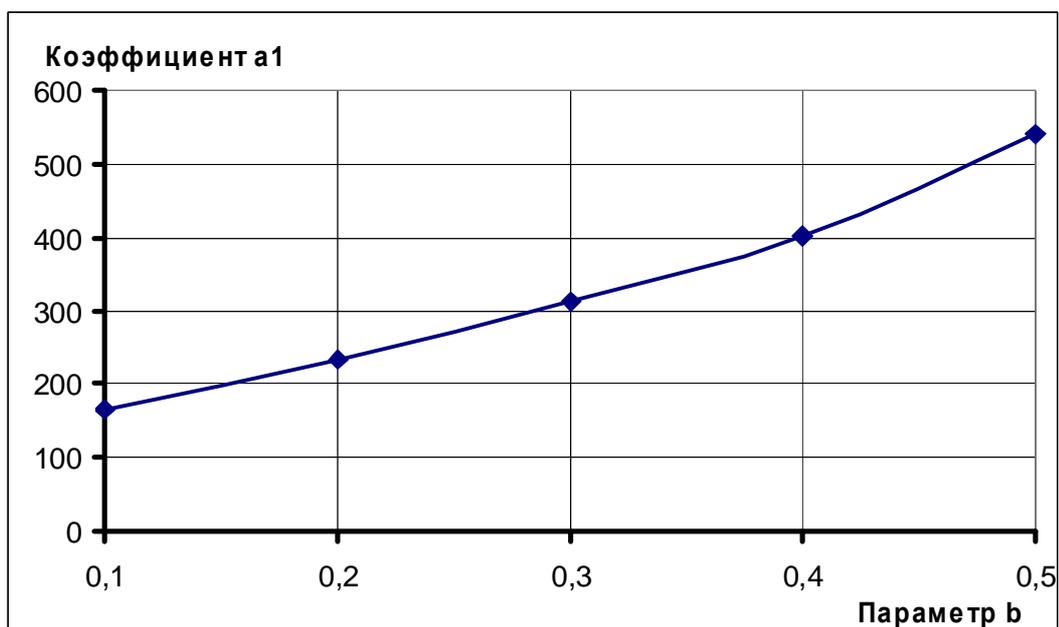
*Рис. 2. – Зависимость коэффициента детерминации от параметра b при моделировании корреляционных зависимостей рис.1 линейной моделью парной регрессии*

**Постановка задачи.** Для построения функциональной зависимости между фрактальной размерностью ФВМ  $D$  и средним значением ФВМ  $(1)$  с помощью линейной модели парной регрессии вида:

$$\bar{C}(t) = a_0 + a_1 \cdot D \quad (2)$$

требуется исследовать влияние параметра  $b$  ФВМ на коэффициенты  $a_0$  и  $a_1$  правой части  $(2)$ , исходя из полученных ранее корреляционных зависимостей рис. 1.

**Основные результаты работы.** Как видно из рис. 1, оба исследуемых коэффициента с ростом  $b$  изменяются. Для аппроксимации корреляционной зависимости  $a_1$  и  $b$  (рис. 3)



*Рис. 3. – Корреляционная зависимость коэффициента  $a_1$  от параметра b*

была сначала построена линейная модель:

$$a_1 = c_0 + c_1 \cdot b \quad (3)$$

и с помощью метода наименьших квадратов (МНК) оценены коэффициенты  $c_0$  и  $c_1$ , которые получились равными:  $c_0 \cong 56,409$ ;  $c_1 \cong 912,936$ . Таким образом, наилучшая с точки зрения МНК линейная зависимость коэффициента  $a_1$  от  $b$  имеет вид:

$$\hat{a}_1^l \cong 56,409 + 912,936 \cdot b \quad (4)$$

Затем была предпринята попытка улучшить качество аппроксимации за счет учета квадратичного члена, заменив зависимость (3) на квадратичную вида:

$$a_1 = c_0 + c_1 \cdot b + c_2 \cdot b^2, \quad (5)$$

для которой также с помощью МНК были оценены коэффициенты:  $c_0 \cong 345,524$ ;  $c_1 \cong -2251,600$ ;  $c_2 \cong 4911,335$ . Таким образом, наилучшая с точки зрения МНК квадратичная зависимость коэффициента  $a_1$  от  $b$  имеет вид:

$$\hat{a}_1^k \cong 345,524 - 2251,600 \cdot b + 4911,335 \cdot b^2 \quad (6)$$

И, наконец, был произведен учет кубического члена с помощью зависимости:

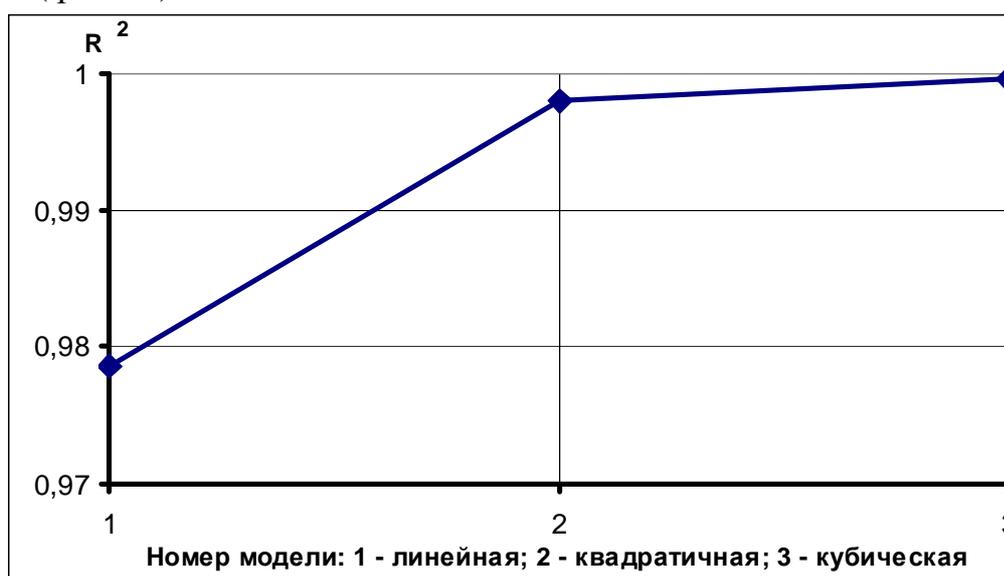
$$a_1 = c_0 + c_1 \cdot b + c_2 \cdot b^2 + c_3 \cdot b^3, \quad (7)$$

При этом коэффициенты, найденные с помощью МНК, оказались равными:  $c_0 \cong 80,633$ ;  $c_1 \cong 925,855$ ;  $c_2 \cong -1510,535$ ;  $c_3 \cong 2888,066$ .

Таким образом, наилучшая с точки зрения МНК кубическая зависимость коэффициента  $a_1$  от  $b$  имеет вид:

$$\hat{a}_1^m \cong 80,633 + 925,855 \cdot b - 1510,535 \cdot b^2 + 2888,066 \cdot b^3 \quad (8)$$

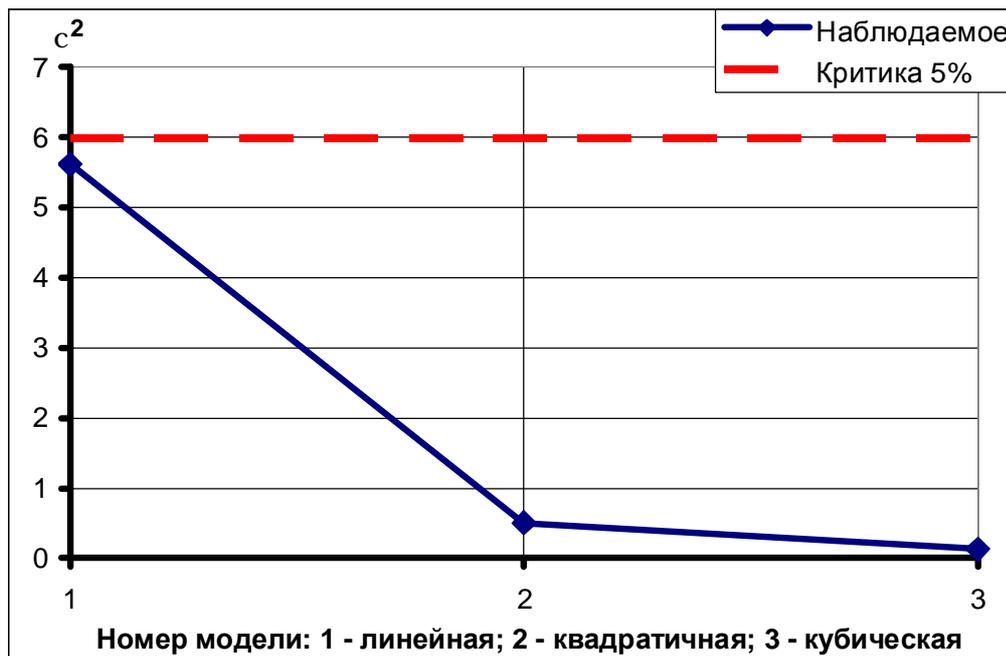
Качество построенных зависимостей (4), (6) и (8) проверялось с помощью коэффициента детерминации (рис. 4) и критерия согласия  $\chi^2$ -Пирсона (рис. 5).



**Рис. 4. – Изменение коэффициента детерминации при усложнении формы модели зависимости коэффициента  $a_1$  от параметра  $b$**

Усложнение модели связано, прежде всего с высоким качеством аппроксимации корреляционных зависимостей рис. 1 моделью (2). Значения

коэффициентов детерминации для линейной и квадратичной моделей составили 0,979 и 0,998 соответственно, что ниже значений коэффициентов детерминации, рассчитанных при моделировании ( рис. 2 ). И только модель (8) позволяет с уверенностью сделать вывод о том, что потерь качества при замене коэффициента  $a_1$  на правую часть ( 8 ) не будет, т.к. значение коэффициента детерминации составляет 0,9995.

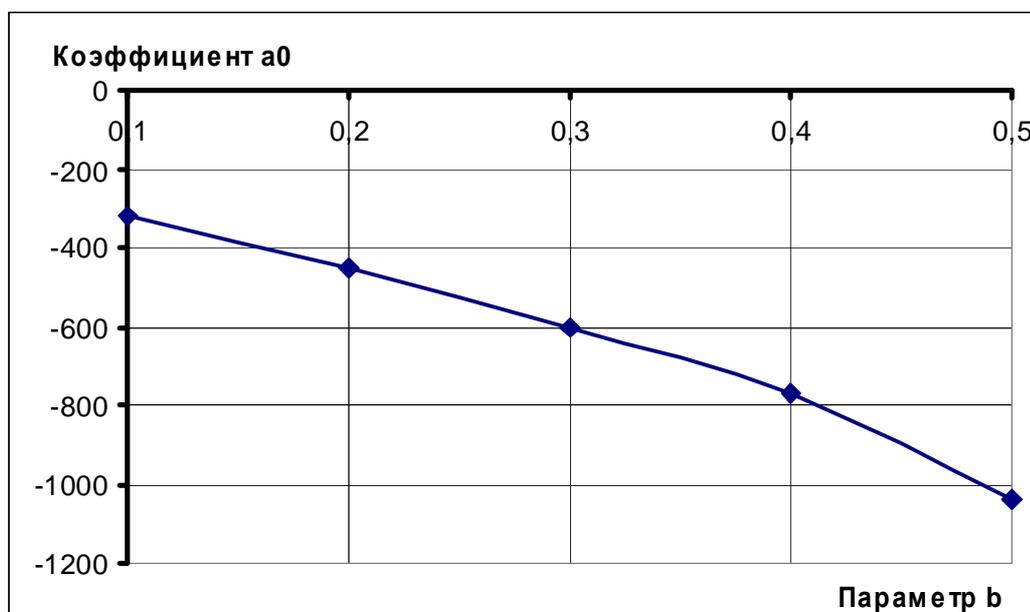


**Рис. 5. – Динамика изменения наблюдаемого значения критерия согласия при усложнении модели**

Критерий согласия еще более наглядно показывает улучшение качества моделирования при усложнении формы модели. Критическое значение критерия для рассматриваемых двух степеней свободы равно 5,99147 ( 5 % -й уровень значимости ). Наблюдаемое значение критерия для линейной модели ( 4 ) составляет 5,613, что очень близко к критическому, несмотря на высокое значение коэффициента детерминации. Для квадратичной модели ( 6 ) величина наблюдаемого значения критерия сокращается более, чем в десять раз: 0,505 и почти в четыре раза сокращается еще для кубической модели (8): 0,130.

Таким образом, проверка качества построенных моделей ( 4 ), ( 6 ) и (8) показала, что лишь последняя из них достаточно точно описывает динамику изменения коэффициента  $a_1$  в модели ( 2 ).

Следующим этапом является исследование зависимости другого параметра  $a_0$  модели ( 2 ) от  $b$ . При замене корреляционных зависимостей рис.1 на функциональные вида ( 2 ) была построена зависимость изменения  $a_0$  при различных значениях  $b$ . Эта зависимость приведена на рис. 6.



**Рис. 6. – Корреляционная зависимость коэффициента  $a_0$  от параметра  $b$**

Аналогично схеме построения зависимости  $a_1$  от  $b$ , сначала была исследована линейная зависимость, подобная ( 3 ). С помощью МНК подобраны коэффициенты этой модели:

$$\hat{a}_0^n \cong -108,669 - 1757,665 \cdot b \quad (9)$$

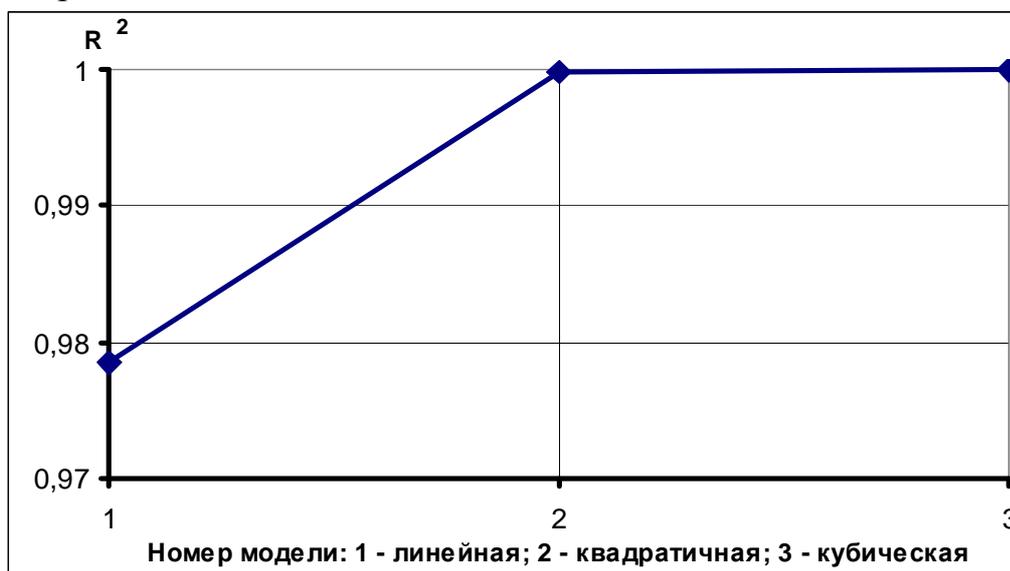
Затем были подобраны лучшие с точки зрения МНК коэффициенты квадратичной зависимости, подобной ( 5 ):

$$\hat{a}_0^k \cong -255,608 - 497,184 \cdot b - 2099,143 \cdot b^2 \quad (10)$$

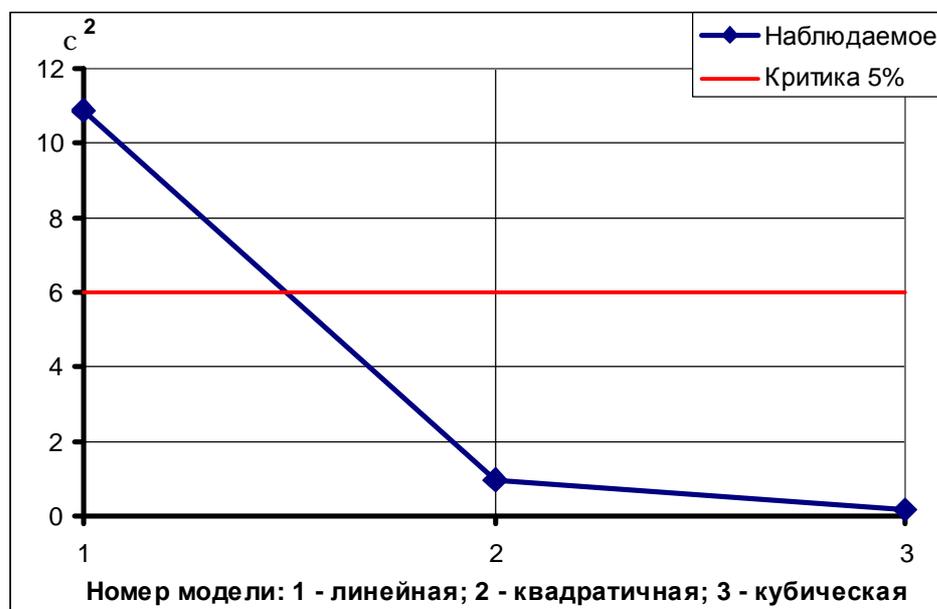
и кубической зависимости, подобной ( 7 ):

$$\hat{a}_0^m \cong -153,068 - 1937,683 \cdot b + 3394,464 \cdot b^2 - 6104,167 \cdot b^3 \quad (11)$$

Качество построенных моделей ( 9 ), ( 10 ) и ( 11 ) оценивалось с помощью коэффициента детерминации ( рис. 7 ) и критерия согласия  $\chi^2$ -Пирсона ( рис. 8 ).



**Рис. 7. – Изменение коэффициента детерминации при усложнении формы модели зависимости коэффициента  $a_0$  от параметра  $b$**



**Рис. 8. – Динамика изменения наблюдаемого значения критерия согласия при усложнении модели**

Таким образом, в результате данной работы построена модель зависимости среднего значения ФВМ от параметров функции:

$$\bar{C}(t) = (80,633 + 925,855 \cdot b - 1510,535 \cdot b^2 + 2888,066 \cdot b^3)D - 153,068 - 1937,683 \cdot b + 3394,464 \cdot b^2 - 6104,167 \cdot b^3$$

Причем, данная модель объясняет более 99,9% дисперсии корреляционных зависимостей рис.1.

### Литература

1. **Седельников А.В., Бязина А.В., Антипов Н.Ю.** Использование функции Вейерштрасса-Мандельброта для моделирования микроускорений на борту КА // Сборник научных трудов X Всероссийского научно-технического семинара по управлению движением и навигации ЛА. Самара. 2002. с. 124-128.
2. **Седельников А.В., Корунтяева С.С., Чернышева С.В.** Анализ влияния параметров функции Вейерштрасса-Мандельброта на ее закон распределения // Современные наукоемкие технологии. – 2005 г. - № 9. – с. 43-46.
3. **Седельников А.В., Бязина А.В., Иванова С.А.** Статистические исследования микроускорений при наличии слабого демпфирования колебаний упругих элементов КА // Научные чтения в Самарском филиале РАО. – Часть 1. Естественное знание. – М.: Изд. УРАО. – 2003. – 137 – 158.
4. **Седельников А.В., Корунтяева С.С., Подлеснова Д.П.** Исследование динамики изменения среднего значения фрактальной функции Вейерштрасса-Мандельброта как случайной величины // Фундаментальные исследования. - № 4. – 2006. – с. 84-87.
5. **Седельников А.В., Корунтяева С.С., Чернышева С.В.** Выявление коридора значений параметров фрактальной функции Вейерштрасса-Мандельброта, при которых справедлив нормальный закон распределения функции // Современные наукоемкие технологии. - № 1. – 2006. – с. 85-87.