

# ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДЫХ ЧАСТИЦ В СТОЛБЕ ЖИДКОСТИ, СОВЕРШАЮЩЕМ КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

*\*Машеренков В.М.*

*Читинский государственный университет, Чита, Россия*

*\* [vasmash@mail.chita.ru](mailto:vasmash@mail.chita.ru)*

В работе [1] описано наблюдавшееся в эксперименте разделение твёрдых частиц в вертикальном столбе жидкости, совершающем крутильные колебания. Отмечено, что частицы, имевшие меньшие размеры и большую плотность, собирались у стенки сосуда, совершавшего крутильные колебания и передававшего их жидкости, а частицы, имевшие большие размеры и меньшую плотность, концентрировались в центральной, осевой части сосуда. При стационарном вращении столба жидкости разделения частиц не наблюдалось, все они собирались у стенки сосуда.

Для раскрытия механизма разделения твёрдых частиц в столбе жидкости, совершающем крутильные колебания, рассмотрим особенности динамики твёрдых частиц, находящихся под действием нестационарных центробежных сил.

В рассматриваемой ситуации на находящиеся в жидкости твёрдые частицы в радиальном, горизонтальном направлении действуют следующие силы:

1) направленная по радиусу от оси вращения центробежная сила инерции

$$F_{цб} = m_{ч} \cdot \omega_{ч}^2 \cdot R, \quad (1)$$

где  $m_{ч}$  – масса частицы;  $\omega_{ч}$  – угловая скорость частицы;  $R$  – радиус вращения частицы;

2) направленная по радиусу к оси вращения центробежная архимедова сила

$$F_{ца} = m_{жс} \cdot \omega_{жс}^2 \cdot R, \quad (2)$$

где  $m_{жс}$  – масса жидкости, вытесненной частицей;  $\omega_{жс}$  – угловая скорость слоев жидкости;

3) направленная по радиусу против скорости радиального перемещения  $u_r$  частицы сила вязкого сопротивления, которая в силу малости размеров частиц определяется законом Стокса

$$F_{вр} = k \cdot u_{ч}, \quad (3)$$

где  $k$  – коэффициент сопротивления движению частицы, зависящий от вязких свойств жидкости, размеров и формы частицы.

Уравнение динамики радиального движения частицы запишется в виде

$$m_{ч} a_{ч} = F_{цб} - F_{ца} - F_{вр}, \quad (4)$$

где  $a_{ч}$  – ускорение радиального движения частицы.

Из уравнения (4) получаем

$$a_{\text{ч}} = \left( w_{\text{ч}}^2 - \frac{\rho_{\text{жс}}}{\rho_{\text{ч}}} \cdot w_{\text{жс}}^2 \right) \cdot R - \frac{k}{m_{\text{ч}}} \cdot u_{\text{ч}}, \quad (5)$$

где  $\rho_{\text{жс}}$  – плотность жидкости, а  $\rho_{\text{ч}}$  – плотность частицы .

Из уравнения (5) вытекает, что в начальный момент времени, когда  $v_r = 0$  при  $\left( w_{\text{ч}}^2 - \frac{\rho_{\text{жс}}}{\rho_{\text{ч}}} \cdot w_{\text{жс}}^2 \right) > 0$  ускорение частицы направлено от оси сосуда к его стенке, а при  $\left( w_{\text{ч}}^2 - \frac{\rho_{\text{жс}}}{\rho_{\text{ч}}} \cdot w_{\text{жс}}^2 \right) < 0$  ускорение частицы направлено к оси сосуда.

Значит, при  $w_{\text{ч}} > w_{\text{жс}} \sqrt{\frac{\rho_{\text{жс}}}{\rho_{\text{ч}}}}$  твёрдая частица должна двигаться к стенке сосуда, а при  $w_{\text{ч}} < w_{\text{жс}} \sqrt{\frac{\rho_{\text{жс}}}{\rho_{\text{ч}}}}$  – к оси сосуда.

Связь между угловыми скоростями частицы  $w_{\text{ч}}$  и слоёв жидкости  $w_{\text{жс}}$  найдём исходя из закона сохранения механической энергии, приняв, что кинетическая энергия колебательного движения твёрдых частиц приобретается ими за счёт работы вязких сил, действующих на них со стороны жидкости.

Пусть  $w_{\text{жс}}$  меняется со временем по закону

$$w_{\text{жс}} = a \cdot 2 \cdot p \cdot f \cdot \sin(2 \cdot p \cdot f \cdot t), \quad (6)$$

где  $a$ -угловая амплитуда колебаний,  $f$ - линейная частота колебаний,  $t$ - текущее время

Тогда полученное из закона сохранения энергии дифференциальное уравнение для нахождения  $w_{\text{ч}}$  будет иметь вид

$$\frac{dw_{\text{ч}}}{dt} + \frac{k}{m_{\text{ч}}} \cdot w_{\text{ч}} = \frac{k \cdot a \cdot 2 \cdot p \cdot f}{m_{\text{ч}}} \cdot \sin(2 \cdot p \cdot f \cdot t), \quad (7)$$

а его решение, согласно [2] , для установившихся колебаний

$$w_{\text{ч}} \approx \frac{2 \cdot p \cdot f \cdot a}{\sqrt{1 + \frac{4 \cdot p^2 \cdot f^2 \cdot m_{\text{ч}}^2}{k^2}}} \cdot \sin\left(2 \cdot p \cdot f \cdot t - \arctg\left(\frac{2 \cdot p \cdot f \cdot m_{\text{ч}}}{k}\right)\right). \quad (8)$$

Из уравнения (8) следует, что угловая скорость твёрдой частицы будет меняться со временем по тому же гармоническому закону, что и угловая скорость частиц жидкости, но с некоторым отставанием по фазе. При этом амплитудное значение угловой скорости твёрдой частицы будет всегда меньше амплитудного значения угловой скорости частиц жидкости.

Разница между амплитудными значениями скоростей слоев жидкости и твердых частиц и разность фаз их колебаний будет определяться соотношением между массовыми и вязкими силами, действующими на твердые части-

цы, они тем больше, чем сильнее влияние массовых сил.

Частицы, испытывающие преимущественное действие вязких сил, устойчиво движутся от оси вращения, а частицы, для которых более существенно действие массовых сил, движутся с ускорением, направленным к этой оси.

## Литература

1. Фатьянов А.В., Машеренков В.М., Никитина Л.Г. Прогнозирование эффективности разделения минеральных частиц в нестационарном центробежном поле. Пятая междунар. конф.: Новые идеи в науках о Земле. Материалы конф. Часть II.-М., 2001.

2. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М., 1976. -576 с.