

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ ФУНКЦИИ ВЕЙЕРШТРАССА-МАНДЕЛЬБРОТА НА ЕЕ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Седелников А.В., Корунтяева С.С., Чернышева С.В.

Институт энергетики и транспорта Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королева

Введение. Проблема микроускорений вот уже на протяжении нескольких десятилетий является одной из важнейших проблем космического материаловедения [1]. Ее успешное решение позволит шагнуть современным технологиям на революционно новый уровень. На современном этапе развития проблемы ключевую роль играет математическое моделирование микроускорений [2]. В представляемой работе микроускорения на борту орбитального космического аппарата (КА) моделируются с помощью действительной части фрактальной функции Вейерштрасса-Мандельброта (далее – ФВМ). При таком подходе возникает потребность корректной замены одной случайной величины на другую [3, 4]. В отсутствие или при наличии слабого демпфирования микроускорения можно считать случайной величиной [5].

Исследования показывают, что ФВМ также подходит под понятие случайной величины в пределах изменения своих параметров:

$$0 < b < 1; \quad 1,95 < D < 2 \quad (1)$$

Причем, в этой ситуации решающую роль играет фрактальная размерность D : при ее значениях меньших, чем 1,95, ФВМ существенно возрастает и уже не может считаться случайной величиной. Поэтому, не останавливаясь на всех тонкостях данного вопроса, далее будет считаться, что неравенства (1) есть наиболее благоприятный коридор для моделирования микроускорений с помощью ФВМ.

Для корректного моделирования требуется удовлетворить условию тождественности законов распределения микроускорений и ФВМ. Вообще говоря, сама функция Вейерштрасса-Мандельброта [6]:

$$W(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - e^{ib^n t}) e^{ij_n}}{b^{(2-D)n}} \quad (2)$$

может иметь любой закон распределения благодаря фазе j_n . Строго говоря, эта фаза сама по себе является случайной величиной, что придает функции в форме (2) совершенно непредсказуемый характер и лишает возможности проводить какое-либо осмысленное моделирование микроускорений. Видимо, она представляет собой больше мультифрактал, чем классический фрактал, который описывается только одной фрактальной размерностью. В работе [7] показано, что размерность Хаусдорфа-Безыковича функции (2) не совпадает с фрактальной размерностью D . Именно в этом смысле она ближе к мультифракталу, чем к фракталу. Однако эти серьезные вопросы требуют особого внимания и в данной работе рассмотрены не будут. При

моделировании микроускорений с помощью ФВМ полагалось, что фаза всегда равна нулю:

$$j_n = 0 \quad (3)$$

Условие (3) исключает лишнюю случайность из модели микроускорений, но ставит вопрос об исследовании закона распределения ФВМ, который уже не может быть произвольным, как у функции (2).

Постановка задачи. В данной работе рассматривается закон распределения ФВМ при выполнении условия (3) при различных значениях параметров b и D . Необходимо выяснить, изменяется ли закон распределения ФВМ в принятых допущениях при варьировании этими параметрами в коридоре (1) или нет. В зависимости от ответа на поставленный вопрос следует либо строить схему выбора параметров ФВМ для удовлетворения условия тождественности законов распределения (если закон изменяется), либо изменить условие (3) таким образом, чтобы тождественность была выполнена (если закон неизменный).

Следовательно, поставленная задача является актуальной для моделирования микроускорений с помощью ФВМ.

Основные результаты работы. Для решения поставленной задачи целесообразно выдвинуть статистическую гипотезу о нормальном законе распределения ФВМ и проверить ее для разных параметров функции с помощью критерия согласия χ^2 -Пирсона, воспользовавшись хорошо известным интервальным методом анализа непрерывной случайной величины. Если окажется, что нормальный закон распределения, считающийся самым распространенным, будет проходить при одних значениях параметров b и D и отвергаться при других, то следует сделать вывод о зависимости закона распределения от значений параметров.

Предварительные статистические исследования проводились для значений $b = 0,1; 0,4$ и $0,5$ и $D = 1,99 \dots 1,9[20]$, где цифра в квадратных скобках означает число девяток после запятой. Следует отметить выбор этого числа тем, что фрактальная размерность не может быть равной двум с одной стороны, а дальнейшее «прибавление» девяток после запятой никак не изменяет ФВМ [8]. После анализа получены результаты, представленные на рис. 1-3 для $b = 0,5$ и различных значениях D из указанного выше диапазона. Как видно из этих рис., гипотеза о нормальном законе распределения не может быть принята даже на самом «мягком» 1%-м уровне значимости. Приблизительно такая же картина наблюдается и при других значениях D . Более того, анализ представленных зависимостей показывает, что у всех кривых изменения критерия согласия приблизительно совпадают локальные экстремумы. Так, например, для всех значений D при 18-ти диапазонном разбиении наблюдается локальный минимум, а при 28-ми диапазонном разбиении – локальный максимум и т.д. Следует также отметить, что крайние области на графиках – левая для числа диапазонов 4-10 и правая для числа диапазонов 24-30 – дают менее надежные результаты, чем средняя область.

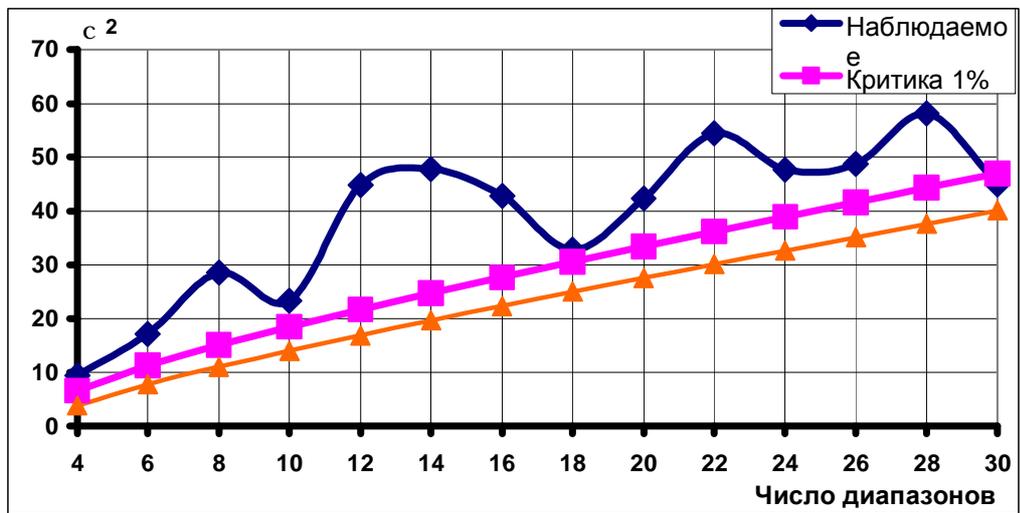


Рис.1. - Изменение критерия согласия для ФВМ $b = 0,5$; $D = 1,99$

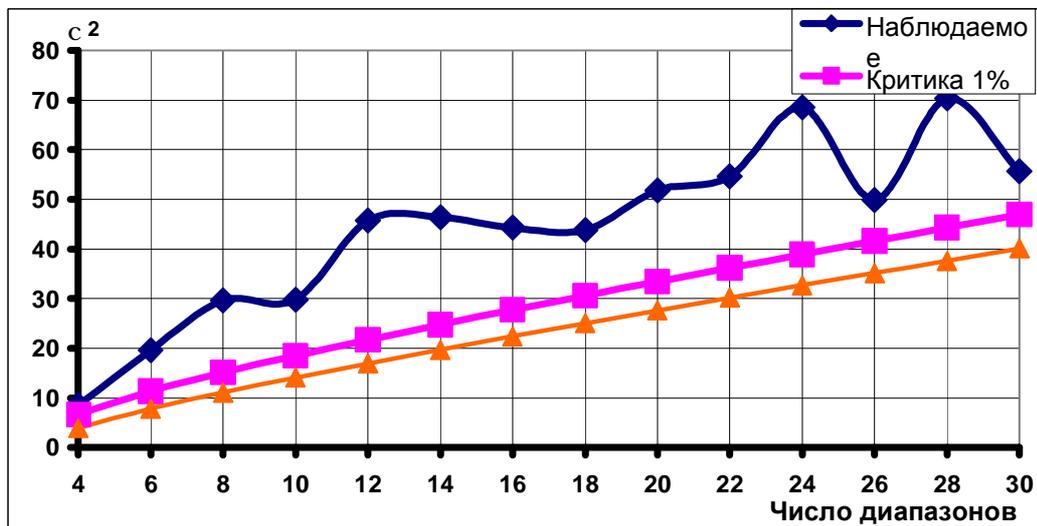


Рис.2. - Изменение критерия согласия для ФВМ $b = 0,5$; $D = 1,994$

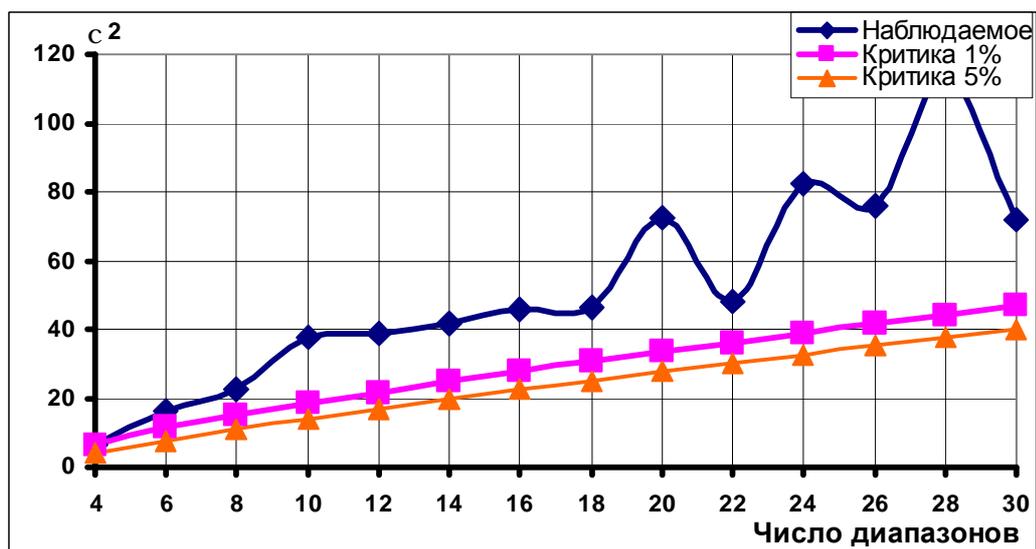


Рис.3.- Изменение критерия согласия для ФВМ $b = 0,5$; $D = 1,9[20]$

Это объясняется тем, что при разбиении на малое число диапазонов функция распределения аппроксимируется крайне неточно. Для слишком большого

числа диапазонов выборка в тысячу точек оказывается недостаточной для уверенного построения самих диапазонов.

Иная картина наблюдается при значении $b = 0,4$ (рис. 4-6).

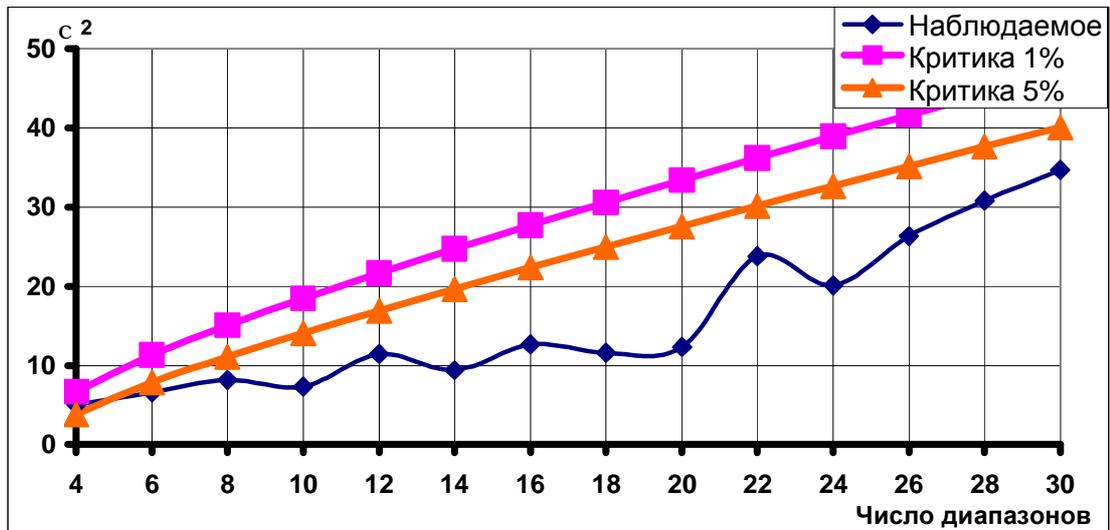


Рис.4. - Изменение критерия согласия для ФВМ $b = 0,4$; $D = 1,993$

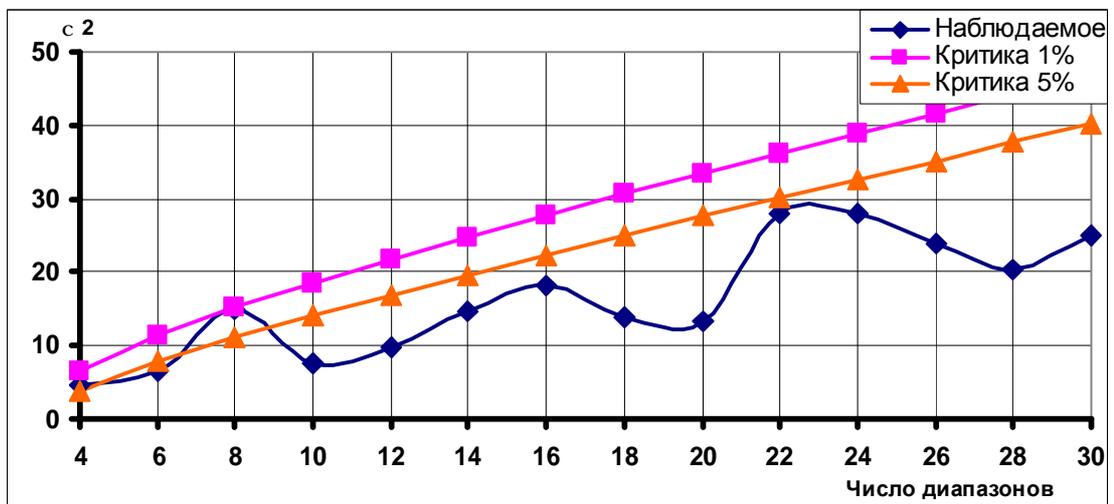


Рис.5. - Изменение критерия согласия для ФВМ $b = 0,4$; $D = 1,996$

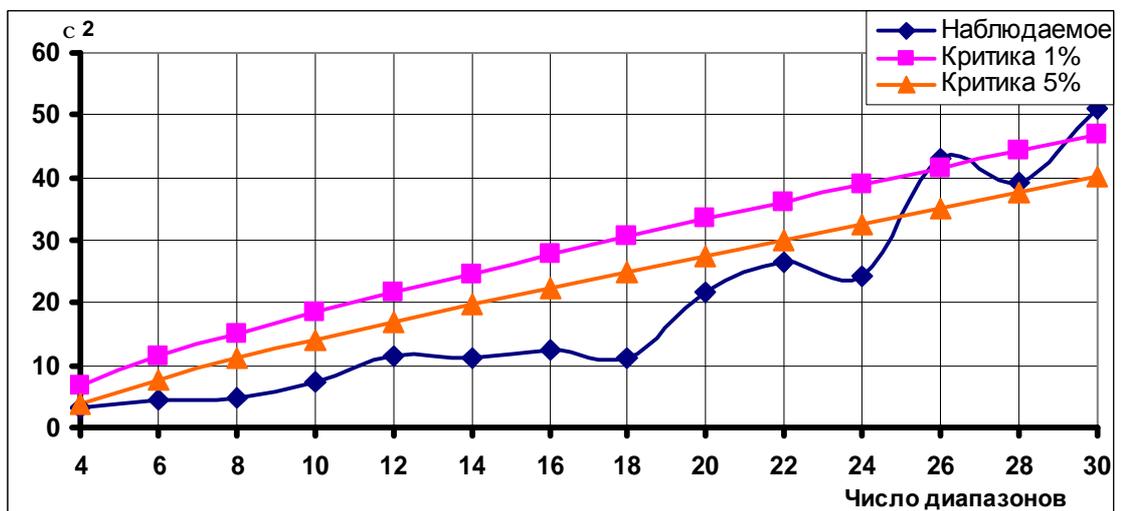


Рис.6. - Изменение критерия согласия для ФВМ $b = 0,4$; $D = 1,999$

Видно, что здесь гипотеза о нормальном законе распределения ФВМ принимается практически везде не только на 1%-м, но и более «жестком» 5%-м уровне значимости.

Анализ динамики поведения критерия согласия для значения $b = 0,1$ дал еще более сложную картину (рис. 7). Здесь нельзя с уверенностью как утверждать нормальный закон распределения, так и опровергать его.

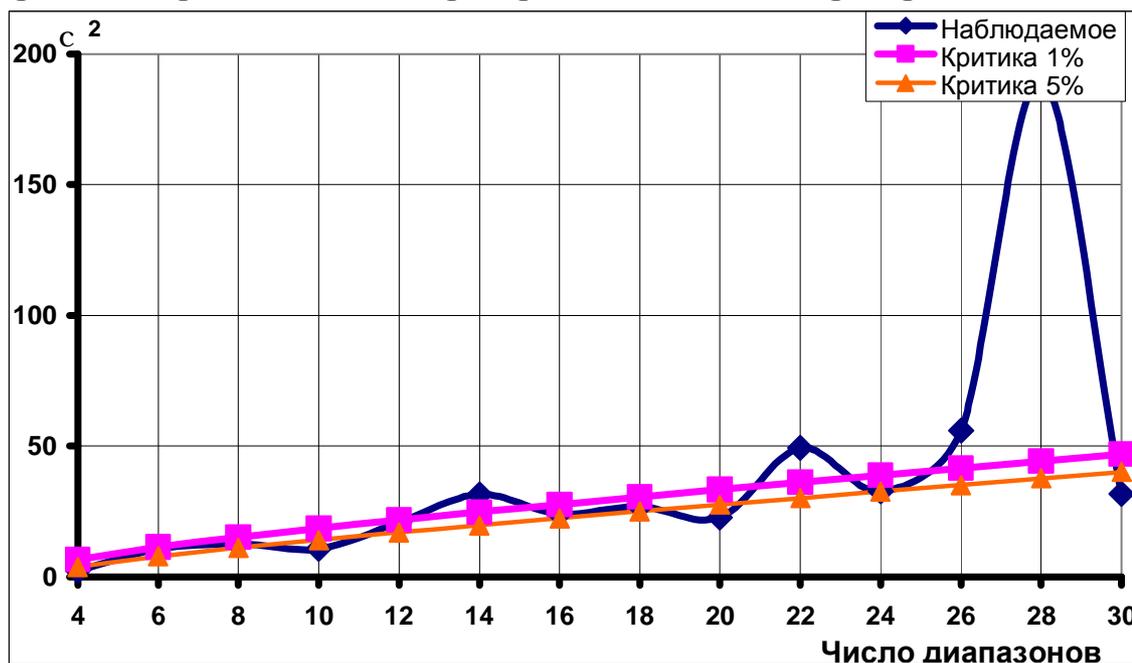


Рис.7. – Изменение критерия согласия для ФВМ $b = 0,1$; $D = 1,991$

Основные выводы по работе. Статистический анализ показал, что закон распределения ФВМ в коридоре (1) полностью зависит от параметров функции, в частности, от b . Поэтому при моделировании микроускорений с помощью ФВМ необходимо создать схему выбора этого параметра таким образом, чтобы законы распределения ФВМ и самих микроускорений совпадали.

С другой стороны, этот вывод позволяет сохранить условие (3) при моделировании, т.к. в случае независимости закона распределения от параметров b и D пришлось бы вводить соответствующую фазу, которая не имела бы физического смысла в двухпараметрической модели микроускорений в рассматриваемой постановке задачи [5].

Дальнейшие исследования должны быть направлены на более четкое выявление границ применимости нормального закона распределения и вида этого закона в случае отвержения гипотезы его нормальности. Здесь, по-видимому, речь идет о некоторой полосе значений b , в которой гипотеза справедлива.

Литература

1. Седельников А.В. Проблема микроускорений: 30 лет поиска решения // Современные наукоемкие технологии. – 2005. - № 4. – с. 15-22.

2. Седельников А.В. Исследование функции распределения уровня микроускорений во времени // Успехи современного естествознания. – 2004. – № 9. – с. 15-18.
3. Седельников А.В., Бязина А.В. Исследование законов распределения микроускорений, смоделированных с помощью функции Вейерштрасса-Мандельброта и полученных в результате эксперимента // Современные проблемы механики и прикладной математики. – Сборник трудов международной школы-семинара. – Ч. 1. – т. 2. – Воронеж. – 2004. – с. 450-453.
4. Седельников А.В. Статистические исследования микроускорений как случайной величины // Фундаментальные исследования. №6. 2004. с. 123-124.
5. Седельников А.В., Бязина А.В., Иванова С.А. Статистические исследования микроускорений при наличии слабого демпфирования колебаний упругих элементов КА // Сборник научных трудов в Самарском филиале УРАО. ч. 1. Самара. 2003. с. 137 – 158.
6. Mandelbrot B.B. The fractal geometry of nature – New York: W.H. Freeman. – 1983. – 273 pp.
7. Mauldin R.D. On the Hausdorff dimension of graphs and random recursive objects // Dimension and Entropies in Chaotic Systems. – Springer-Verlag. – Berlin. – pp. 28-33.
8. Седельников А.В., Бязина А.В. Использование фракталов в математическом моделировании // Сборник научных трудов в Самарском филиале УРАО. – вып. 2-3. – Самара. – 2002. – с. 72 – 85.