Г.И. Синько (Уссурийск)

ОБ ОБОБЩЕННОЙ РЕЗОЛЬВЕНТЕ ОДНОГО СИММЕТРИЧЕСКОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ПОЛУОСИ

Рассматривается в гильбертовом пространстве $L^2(0,+\infty)$ интегро-дифференциальное (и.-д.) выражение вида

$$a[y] = l[y] + k[y], \qquad (1)$$

где $l[y] = -y'' + q(x)y$ – самосопряженное дифференциальное выражение с вещественным и суммируемым коэффициентом $q(x)$ таким, что для любого $b > 0$ $\int\limits_0^b |q(x)|\,dx < +\infty$, а $k[y] = \int\limits_0^{+\infty} K(x,s)y(s)ds$ – интегральное выражение с ненулевым вещественным симметрическим ядром Гильберта-Шмитда $K(x,s)$ удовлетворяющее условиям:

а) для любых решений $u(x, l\,)$ уравнения $l[y] - l y = 0$

$$\int\limits_0^{+\infty} |K(x,s)u(s, l\,)|\,ds < +\infty;$$

б) в окрестности вещественной оси существует и регулярно по l решение однородного и.-д. уравнения $a[y] - l y = 0$.

Операцией l в $L^2(0,+\infty)$ порождается квазидифференциальный оператор L с минимальной областью определения D_L.

Обозначим через $A = L + K$ и.-д. оператор, порождаемый и.-д. выражением (1) с минимальной областью определения $D_A = D_L$, где $Ky = k[y]$.

В работе рассматривается случай индекса дефекта (1.1).

Пусть l_0 – произвольное фиксированное невещественное число, а F – линейный оператор, действующий из дефектного подпространства N_{l_0} в $N_{\overline{l_0}}$.

Квазисамосопряженным расширением оператора F, определяемым ограниченным оператором F, называется оператор A_F, заданный на множестве

$$D_{A_F} = D_A \dotplus [F - I]N_{l_0}$$

равенством

$$A_F\, f = Af_0 - \overline{l_0} j + l_0 F j \quad (f_0 \in D_A, j \in N_{l_0}),$$

а совокупность всех обобщенных резольвент R_l оператора A определяется равенством (см. [1])

$$R_l = (A_{F(l\,)} - lE)^{-1} \quad (\operatorname{Im} l \cdot \operatorname{Im} l_0 > 0),$$

где $F(l\,)$ – произвольная регулярная в полуплоскости операторная функция из дефектного подпространства N_{l_0} в $N_{\overline{l_0}}$, не превосходящая единицы по норме, а $A_{F(l\,)}$ – квазисамосопряженное расширение оператора A, определяемое оператором $F(l\,)$. Были доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Область определения $D_{A_{F(l)}}$ квазисамосопряженного расширения $A_{F(l)}$ и.-д. оператора A есть совокупность всех тех функций $y(x) \in D_{A^*}$, которые удовлетворяют граничному условию

$$y(0) = J(l) y'(0) \quad (\operatorname{Im} l > 0), \tag{2}$$

где $J(l)$ – произвольная регулярная в верхней полуплоскости функция с неотрицательной мнимой частью, или обращается в бесконечность. При этом формулой (2) определяется самосопряженные расширения и.-д. оператора A в пространстве $L^2(0,+\infty)$ тогда и только тогда, когда $J(l)$ есть вещественная постоянная или обращается в бесконечность. Соответствие между классом операторных функций $F(l)$ и классом функций $J(l)$ взаимно однозначно.

Пусть $f(x)$ – произвольная функция из $L^2(0,+\infty)$, тогда имеет место

Теорема 2. Совокупность всех обобщенных резольвент R_l и.-д. оператора A при любом невещественном l является интегральным оператором

$$R_l f = \int_0^{+\infty} K(x,s,l) f(s) ds \tag{3}$$

с ядром $K(x,s,l) = -\dfrac{\Psi(x,l) \cdot \Psi(s,l)}{M(l) + J(l)} + \tilde{K}(x,s,l)$, где $J(l)$ – произвольная регулярная в верхней полуплоскости функция с неотрицательной мнимой частью, или обращается в бесконечность. При этом различным функциям $J(l)$ соответствуют различные обобщенные резольвенты. Формулой (3) определяется резольвента самосопряженного расширения в пространстве $L^2(0,+\infty)$ и.-д. оператора A тогда и только тогда, когда $J(l)$ есть вещественная постоянная или обращается в бесконечность.

Здесь $\Psi(x,l)$ – решение однородного и.-д. уравнения, удовлетворяющее условиям $\Psi(x,l) \in L^2(0,+\infty)$ и $\Psi(x,\bar{l}) = \overline{\Psi(x,l)}$, а функция $M(l)$, зависящая от решения однородного и.-д. уравнения регулярна в верхней полуплоскости и имеет там положительную мнимую часть. Ядро $\tilde{K}(x,s,l)$ выражается через резольвенту некоторого самосопряженного расширения дифференциального оператора L для некоторого элемента, зависящего от $f(x)$ из $L^2(0,+\infty)$.

Построения всех формул обобщенных резольвент конечномерного возмущения дифференциальных операторов можно найти в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Штраус А.В. Обобщенные резольвенты симметрических операторов // Изв. АН СССР, серия математическая, 1954,– Т.18. №1.– с.51-86.

2. Синько Г.И. Спектральная теория интегро-дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве.– Уссурийск: Изд-во УГПИ, 1999. 151с.