

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ ХАТЧИНСОНА-РАЙТА

(Брызгалов Евгений Владимирович — ПГУ)

Попытки моделирования динамики популяций при ограниченных ресурсах предпринимались с середины 19 века. Впервые эффект запаздывания был учтён почти 100 лет спустя Хатчинсоном. Он модифицировал «классическое» уравнение Ферхюльста, а именно сомножитель, учитывающий наличие верхней границы популяции, вычисляется в некоторый предшествующий данному момент времени:

$$\frac{dN(t)}{dt} = r \left[1 - \frac{N(t-T)}{K} \right] N(t)$$

Уравнение, получившее название уравнения Хатчинсона-Райта имеет 2 равновесных состояния: 0 и K . Можно доказать, что первое состояние равновесия линейно неустойчиво, а второе линейно устойчиво при $rT < p/2$ и неустойчиво в противном случае. В частности, при $T=0$ уравнение (1) превращается в уравнение Ферхюльста, где K — устойчивое равновесное состояние.

Следующим шагом становится введение автором в модель параметрически изменяющегося биотического потенциала. Действительно, в природе большое влияние на процесс размножения оказывают сезонные факторы и пр. То есть мы можем записывать в модели биотический потенциал не как константу, а как функцию от времени:

$$r = r_0 + f(t)$$

Выбирая в качестве неизвестной функции гармоническую и учитывая, что изменение биотического потенциала не влияет на коэффициент внутривидовой конкуренции ($m=r/K$), получим:

$$\frac{dN(t)}{dt} = r \left[1 - \frac{r_0}{r} \frac{N(t-T)}{K} \right] N(t), \text{ где } r = r_0 + A \sin(2\pi t/t)$$

Очевидно, что исследование данной модели возможно лишь численно.

Следует отметить, что большинство современных математических пакетов (Maple и пр.) не позволяет непосредственно осуществлять исследование систем на основе уравнений с запаздывающим аргументом. Для изучения поведения данной системы была использована разработанная автором моделирующая среда «Model Designer», позволяющая описывать и исследовать широкий класс динамических систем, в том числе и с использованием отклоняющегося аргумента.

Решение полученного уравнения осуществлялось средой с использованием схемы Штермера 5-го порядка, в качестве начального условия было принято $N(t) = N_0$ для $-T < t \leq 0$.

Для определения и идентификации динамического режима известно достаточно большое число способов. «Model Designer» поддерживает возможности построения фазовых плоскостей и спектров Фурье. С их помощью можно достаточно легко разбить режимы на периодические, квазипериодические (сумма нескольких периодических движений, которая, вообще говоря, не является периодической) и аperiodические.

Исследование модели затрудняется наличием большого числа параметров (биотический потенциал, время запаздывания, емкость среды, амплитуда и период колебаний биотического потенциала). Соответственно, в работе не везде выделены области того или иного режима, а только приведены найденные режимы. Часть режимов обнаруживаются в рамках модели Хатчинсона-Райта ($A=0$).

Полагая время запаздывания равным нулю, мы получаем логистическую кривую. Увеличивая запаздывание, мы приходим к первой бифуркации — смене режима монотонного возрастания (затухания) на режим затухающих колебаний. Время этого запаздывания обратно пропорционально биотическому потенциалу: $rT \in (0.45, 0.5)$. При дальнейшем нарастании T , колебания становятся более явными. Частота их пропорциональна биотическому потенциалу и постоянна при постоянном наборе параметров, что подтверждает спектр. При $rT = p/2$ согласно теории

наступает смена затухающих колебаний нарастающими, которые становятся более выраженными при увеличении T . Неустойчивость состояния $N=K$ подтверждается спектром.

Вторая серия численного эксперимента связана с изменением амплитуды колебаний биотического потенциала при отсутствии запаздывания. ($T=0$). В данном случае вне зависимости от A , в итоге получаются периодические колебания. Незначительное отличие состоит только в поведении системы до выхода на предельные циклы.

Наиболее интересные результаты даёт комбинирование предыдущих двух серий. Примером может служить бипериодическое движение (его бипериодичность подтверждает спектр), получить которое невозможно в рамках первых двух серий, или биения.

Но в любом случае, в рамках данной модифицированной модели мы можем получить только квазипериодические движения, так как фактически у нас два источника возникновения периодичности: запаздывание и изменение биотического потенциала. Кроме того, необходимо учитывать, что первый источник порождает нестабильные (затухающие или нарастающие) колебания, а второй стабильные. Следовательно при малых rT (строго говоря, при любом $rT < p/2$) произойдет исчезновение первого источника и достаточно продолжительное наблюдение даст результаты, аналогичные результатам второй серии, при больших rT постоянные колебания второго источника будут поглощены.