Кравец О.Я., Севрюков Н.Н.

Стохастическая модель оптимизации мониторинга телекоммуникационных сетей

В качестве модели телекоммуникационной сети удобно использовать сеть систем массового обслуживания (СМО), в которой каждый канал представляется двумя обслуживающими устройствами СМО, а узлы сети задают коммутационные матрицы для связи параметров потоков.

Входящими параметрами для узла являются интенсивности потоков $\lambda_{i,j}$, где i – индекс узла, откуда поступил поток, а j – индекс принимающего узла. Разные узлы имеют не одинаковое количество входов/выходов, обозначим их число через m_i, где i – индекс узла. Также характеристикой узла являются плотности потоков после коммутации – $\rho_{i,kl}$, где i – индекс узла, а k, l – вход/выход через которые проходит поток(см. рис.1). Тогда интенсивность потока с i-го узла на j-ный можно представить в виде:

$$l_{ij} = \sum_{k=1}^{m_i} r_{i,f(k,i)j}\, l_{f(k,i),i}\ , \tag{1}$$

где $f(i_1,i_2)$ функция, которая задает распределение индексов входов/выходов, по сути, введена, чтобы не заострять внимание на выборе порядка их нумерации. Таким образом, было проведено суммирование по всем входам/выходам.

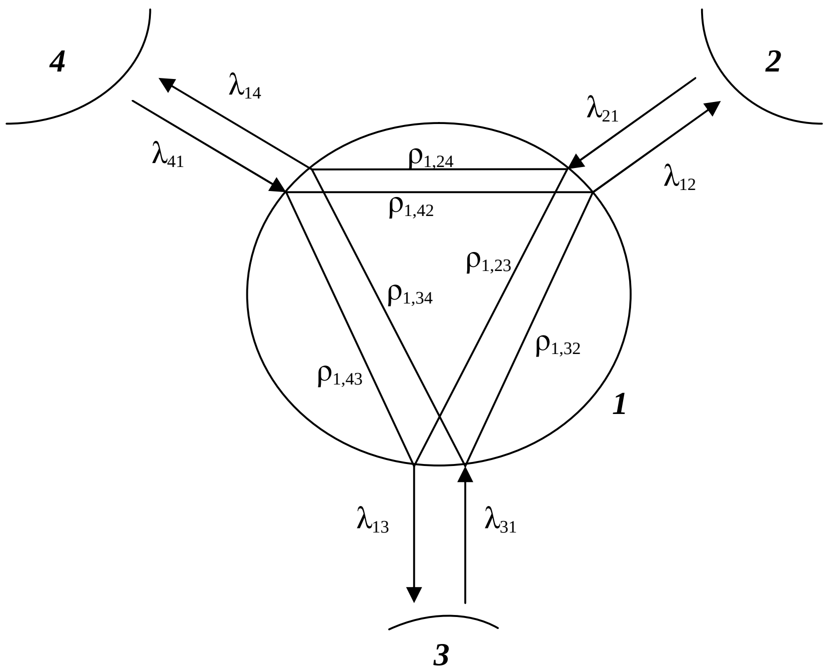

Рис. 1.

Переходя к узлу в целом, данное уравнение можно представить в матричной форме, если ввести матрицу коммутации вида:

$$P_i = \begin{pmatrix} \rho_{i,f(1,i)f(1,i)} & \cdots & \rho_{i,f(1,i)f(m_i,i)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{i,f(m_i,i)f(1,i)} & \cdots & \rho_{i,f(m_i,i)f(m_i,i)} \end{pmatrix}$$

и вектор интенсивности потока для узла i:

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_{f(1,i),i} \\ \vdots \\ \lambda_{f(m_i,i),i} \end{pmatrix}$$

Тогда (1), с учетом всего узла, можно представить в виде:

$$\lambda_{if(k,i)} = P_i^{f(k,i)} \Lambda_i .$$

Полная система для всех n узлов с m_i входами/выходами будет описываться следующей системой линейных алгебраических уравнений:

$$\lambda_{if(k,i)} = P_i^{f(k,i)} \Lambda_i , \quad i = \overline{1,n}\,; k = \overline{0,m_i} \tag{2}$$

или

$$\lambda_{if(k,i)} = \rho_{i,f(1,i)f(k,i)} \lambda_{f(1,i)i} + \ldots + \rho_{i,f(m_i,i)f(k,i)} \lambda_{f(m_i,i)i} , \quad i = \overline{1,n}\,; k = \overline{0,m_i} \,. \tag{3}$$

Целью моделирования является исследование системы при различном поведении систем мониторинга СПД, которые вносят дополнительный поток данных в общий трафик сети. Так как данный поток никак не связан с общими потоками данных, то целесообразно ввести отдельные интенсивности для данного потока, т.е. необходима еще одна система уравнений, которая будет описывать распределение трафика системы мониторинга. В свою очередь задача мониторинга распадается на две составные части, это активный мониторинг некоторой контролирующей станцией и данные, которые посылают сами устройства СПД. Тогда полная интенсивность всех потоков:

$$\lambda = \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} ,$$

где $\lambda^{(0)}$ - интенсивность общего потока, $\lambda^{(1)}$ - интенсивность потока создаваемого станцией мониторинга, $\lambda^{(2)}$ - интенсивность потока событий от устройств:

$$\lambda^{(0)}_{if(k,i)} = P_i^{f(k,i)^{(0)}} \Lambda_i^{(0)} , \quad i = \overline{1,n}\,; \quad k = \overline{0,m_i} ,$$

$$l^{(1)}_{if(k,i)} = P_i^{f(k,i)^{(1)}} \Lambda_i^{(1)} \;, \quad i = \overline{1,n}\,; \quad k = \overline{0,m_i} \;,$$

$$l^{(2)}_{if(k,i)} = P_i^{f(k,i)^{(2)}} \Lambda_i^{(2)} \;, \quad i = \overline{1,n}\,; \quad k = \overline{0,m_i} \;.$$

Необходимо рассматривать задачу с нестационарными потоками. Ниже, непосредственное указание зависимости параметров потока от времени, в формулах может опускаться, но оно будет подразумеваться.

В качестве модели будем рассматривать Марковскую модель массового обслуживания. Воспользуемся «прямым» уравнением процесса рождения и гибели:

$$P_{in}^{/}(t) = \frac{dP_{in}(t)}{dt} = -(l_n + m_n)P_{in}(t) + l_{n-1}P_{i,n-1}(t) + m_{n+1}P_{i,n+1}(t)\,,$$

$$t \ge 0, n > 0, i = 0,1,2,\ldots;$$

$$P_{i0}^{/}(t) = \frac{dP_{i0}(t)}{dt} = -l_0 P_{i0}(t) - m_1 P_{i1}(t)\,,$$

$$n = 0\,, \quad i = 0,1,2,\ldots \qquad (4)$$

Далее индекс *i*, который характеризует начальное состояние, опускается, но будет подразумеваться.

При анализе и решении этой задачи, параметры которой зависят от времени, удобно считать их зависимость периодической (подобная задача была решена в работе *Clare A.B/: A Waiting Time Process of Markov Type, Ann. Math. Static., vol.24, pp.452-459,1956*). Введем преобразование времени τ следующего вида:

$$t \equiv t(t) = \int_0^t m(s)ds\,.$$

Для упрощения вычислений воспользуемся масштабом времени τ:

$$r(t) = \frac{l(t)}{m(t)}\,, \qquad (5)$$

$$R(t) = \frac{\int_0^t l(s)ds}{\int_0^t m(s)ds} = \frac{1}{t}\int_0^t r(s)ds\,.$$

Подставляя (5) в (4) получим «прямое» уравнение процесса гибели и рождения с новой масштабной переменной τ:

$$\frac{P_0(t)}{dt} = -r(t)P_0(t) + P_1(t),$$

$$\frac{P_n(t)}{dt} = -[1 + r(t)]P_n(t) + r(t) + r(t)P_{n-1}(t) + P_{n+1}(t),\; n > 0. \tag{6}$$

Пусть $Q_n(t) = e^{t\,[1+R(t)]}P_n(t)$, *n=0,1,...,* тогда система (6) примет вид:

$$\frac{dQ_0(t)}{dt} = Q_0(t) + Q_1(t),$$

$$\frac{dQ_n(t)}{dt} = r(t)Q_{n-1}(t) + Q_{n+1}(t), \qquad n > 0. \tag{7}$$

Чтобы решить эту систему надо свести ее к дифференциальному уравнению в частных производных, используя метод производящих функций. Применяя производящую функцию

$$Q(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(t)\frac{(z-t)^n}{n!},$$

получаем уравнение:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t\;\partial z} = r(t)Q. \tag{8}$$

Дифференцируя *Q(z,τ)* по *τ*, беря *z=τ* и воспользовавшись уравнением для $Q_0^{'}(t)$ из (7) получаем граничные условия

$$\left.\frac{\partial Q(z,t)}{\partial t}\right|_{z=t} = Q(t,t). \tag{9}$$

Из условия начального состояния системы находим, что $Q(z,0) = \frac{z^i}{i!}$, и пусть $f(t) = \frac{\partial Q(0,t)}{\partial t}$.

Решение задачи Коши для уравнения гиперболического типа находим методом Римана.

$$Q(z,t) = A_i(0,t,z) + \int_0^t A_0(s,t,z)\,f_i(s)\,ds\;. \tag{10}$$

Где:

$$A_n(s,t,z)=z^{\frac{n}{2}}\left[R(t)t-R(s)s\right]^{-\frac{n}{2}}I_0\left(2\{[R(t)t-R(s)s]z\}^{\frac{1}{2}}\right),\quad n=0,\pm1,\ldots;$$

$$\frac{\partial A_n(s,t,z)}{\partial z}=A_{n-1}(s,t,z),\qquad \frac{\partial A_n(s,t,z)}{\partial t}=r(t)A_{n+1}(s,t,z);$$

$$A_n(0,0,0,)=d_{0n},\quad A_{-n}(t,t,t)=\begin{cases}0, n>0,\\ 1, n=0.\end{cases}$$

$$B_n(s,t)=A_n(s,t,t)-r(t)A_{n+1}(s,t,t),$$

$$f_i(t)=B_i(0,t)+\int_0^t B_0(s,t)f_i(s)ds\ .$$

Используя эти выражения, переходим от производящей функции $Q(z,\tau)$ к искомой:

$$P_n(t)=\exp\{-t\left[1+R(t)\right]\}[A_{i-n}(0,t,t)+\int_0^t \mathrm{A}_{-n}(s,t,t)f_i(s)ds\,]. \qquad (11)$$

Зная условные вероятности того, что в момент времени τ в канале находится n пакетов (при условии, что в момент времени $\tau=0$ было i пакетов) и плотность распределения длительности ожидания (n+1)-го пакета, несложно получить среднее время ожидания пакета в очереди.

Задача, выбора критерия оптимального мониторинга сетей передачи данных, сводится к максимизации частоты мониторинга f_{mon} (для одной контролирующей станции). При этом должны выполняться следующие условия: условие «минимальных помех» (поток, создаваемый системой мониторинга, увеличивает среднее время ожидания не более чем на ζ) и условие «равномерности» (дисперсия среднего времени ожидания должна увеличиваться не более чем на η).

$$(1+V)Lq_{ij}\le L\overset{mon}{q_{ij}},$$

$$(1+h)Dq_{ij}\le D\overset{mon}{q_{ij}},\quad i=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,n}.$$

Надо заметить, что среднее время обслуживания Lq находится при условии отсутствия потока мониторинга, т.е. учитываем только $\lambda^{(0)}$, в то время, как Lq^{mon} с учетом полного потока $\lambda=\lambda^{(0)}+\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}$. Аналогично для дисперсий Dq, Dq^{mon} .