КОЛЕБАНИЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

Богатов Н.М., Савченко А.П.

Кубанский государственный университет

Колебания среды, возникающие в твердом теле при высоких температурах, оказывают значительное влияние на образование в нем структурных дефектов. Изучение характера распространения колебаний в упруго-пластической среде является актуальной задачей физики конденсированного состояния. Взаимосвязь колебаний плотности структурных дефектов и смещений среды можно описать с помощью калибровочной теории дефектов [1].

Целью работы является определение частот колебаний упруго-пластической среды с дефектами структуры.

Из полевых уравнений теории [1] следуют уравнения непрерывности и равновесия в обобщенной форме:

$$\nabla_\beta C^{\beta\gamma\mu\nu}(u_{\mu\nu}-\alpha_{\mu\nu}T)=0\,, \tag{1}$$

где $C^{0h0k}=\rho c^2 g^{hk}$, $C^{ijkh}=-c^{ijkh}$, $C^{0\alpha ij}=C^{000\delta}=C^{00\alpha\beta}=0$, $C^{\beta\gamma\mu\nu}=C^{\gamma\beta\mu\nu}=C^{\beta\gamma\nu\mu}=C^{\mu\nu\beta\gamma}$; греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3, а латинские – 1, 2, 3; c^{ijkh} – коэффициенты упругой жесткости кристалла; ρ = const – плотность материала; с – скорость света; $u_{\mu\nu}$ – тензор деформаций кристалла; α_{ij} – тензор теплового расширения кристалла, $\alpha_{0\alpha}$=0; T – температура.

$$u_{\alpha\beta} = (\partial_\beta u_\alpha + \partial_\alpha u_\beta + \theta_{\alpha\beta} + \theta_{\beta\alpha})/2, \tag{2}$$

где $\vec{u}$ – вектор смещений; $\theta_{\alpha\beta}$ – компоненты объектов аффинной связности, обусловленные трансляционными дефектам, например, краевыми дислокациями.

Основные уравнения имеют более простой вид в случае изотропной среды. Коэффициенты упругой жесткости вычисляются по формуле:

$$c_{ijkl} = \lambda\cdot\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu\cdot\delta_{il}\delta_{jk}+\nu\cdot\delta_{ik}\delta_{lj}. \tag{3}$$

Подставив (2) и (3) в (1), получим уравнение динамики среды с дефектами:

$$(\lambda+\mu)\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}(\vec{u}))+\mu\cdot\Delta\vec{u}-\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}=-\lambda\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}(p)-\mu\cdot\vec{s}+\rho\cdot c\frac{\partial\vec{f}}{\partial t}\,, \tag{4}$$

где $p=\Theta_{kk}+\alpha_{kk}T$, $s_i=\partial_j(\Theta_{ij}+\Theta_{ji}-2\alpha_{ij}T)$, $f_i=\Theta_{0i}$, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Правая часть уравнения (4) содержит вынуждающие силы.

Направим ось Ox по направлению распространения волны, тогда вектор смещений $u_i(x,t)$ можно разложить на продольную и поперечные составляющие вида $A_0\exp\{i(\omega\cdot t+k\cdot x)\}$.

Величины p, s_i, f_i зададим в виде гармонических колебаний с амплитудами A_1, A_2, A_3 соответственно, сдвинутых по фазе на величину φ относительно смещений. Подставим $u_i(x,t)$, $p(x,t)$, $s_i(x,t)$ и $f_i(x,t)$ в (4). Для продольных колебаний получим уравнение:

$$-(\lambda+2\mu)k^2+\rho\omega^2 = (-\,i\cdot\lambda k\tau_1 - \mu\tau_2 + i\rho c\omega\tau_3)e^{i\varphi}, \qquad (5)$$

для поперечных колебаний:

$$-\,\mu k^2+\rho\omega^2 = (-\,i\cdot\lambda k\tau_1 - \mu\tau_2 + i\rho c\omega\tau_3)e^{i\varphi}, \qquad (6)$$

где $\tau_m = \dfrac{A_m}{A_0}$, m = 1, 2, 3.

Решив уравнения (5), (6) относительно ω, получим два корня:

$$\omega_n = i\left(\frac{\tau_3}{2}c\cdot\cos\varphi + \frac{(I^2+R^2)^{1/4}}{2\rho}\sin\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{I}{R}+\pi n\right]\right)+$$
$$+\frac{(I^2+R^2)^{1/4}}{2\rho}\cos\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{I}{R}+\pi n\right],\ n = 0,1, \qquad (7)$$

где для продольных колебаний:

$$R_{\parallel} = -\rho^2c^2\tau_3^{\,2}\cos(2\varphi) - 4\rho k^2(\lambda+2\mu) + 4\rho\tau_1\lambda k\sin(\varphi) - 4\rho\tau_2\mu\cos(\varphi),$$

$$I_{\parallel} = -\rho^2c^2\tau_3^{\,2}\sin(2\varphi) - 4\rho\tau_1\lambda k\cos(\varphi) - 4\rho\tau_2\mu\sin(\varphi);$$

для поперечных колебаний:

$$R_{\perp} = -\rho^2c^2\tau_3^{\,2}\cos(2\varphi) - 4\rho\mu k^2 + 4\rho\tau_1\lambda k\sin(\varphi) - 4\rho\tau_2\mu\cos(\varphi),$$

$$I_{\perp} = -\rho^2c^2\tau_3^{\,2}\sin(2\varphi) - 4\rho\tau_1\lambda k\cos(\varphi) - 4\rho\tau_2\mu\sin(\varphi).$$

Мнимая часть выражения (7) определяет коэффициент нарастания (затухания) колебаний. Волновые решения с $\mathrm{Im}\omega_n \neq 0$ физически не реализуются в твердом теле.

Найдем частоты волн колебаний, распространяющихся в среде с дефектами. Положим мнимую часть ω_n равной нулю и определим значение разности фаз φ. Для упрощения расчетов выберем $\tau_2 = \tau_3 = 0$, тогда получим два значения $\varphi_0 = \pi/2$, $\varphi_1 = -\,\pi/2$, при которых для поперечных колебаний

$$\omega_n = (\ |(-1)^n\ k\cdot\mu + \tau_1\cdot\lambda|\cdot k\ /\ \rho\ )^{1/2},\ n = 0,1; \qquad (8)$$

для продольных колебаний

$$\omega_n = (\ |(-1)^n\ k\cdot(\lambda+2\mu) + \tau_1\cdot\lambda|\cdot k\ /\ \rho\ )^{1/2},\ n = 0,1 \qquad (9)$$

Частоты (8) и (9) соответствуют физически возможным решениям уравнения (4) для незатухающих волн деформации. При $\tau_1 = 0$ выражения (8), (9) переходят в известные выражения для волн в упругой среде без дефектов. Структурные дефекты влияют на частоту распространяющихся волн. Зависимость ω_n от отношения амплитуд τ для продольных колебаний показана на рис. 1. Для частоты поперечных колебаний график имеет аналогичный вид. В расчетах использованы значения $\lambda = -5{,}09 \cdot 10^{11}$ Н/м^2 и $\mu = 5{,}31 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, $\rho = 2{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3, $k = 1$ м$^{-1}$.

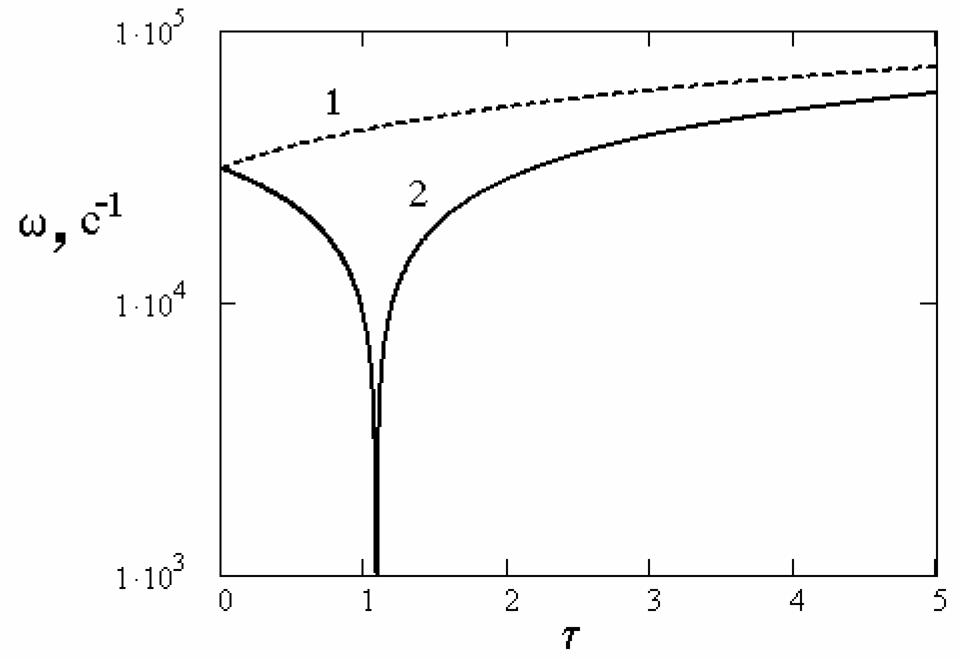

Рис. 1. Зависимость частоты продольных волн в упруго-пластической среде от отношения амплитуд τ: 1 – $\omega_0(\tau)$; 2 – $\omega_1(\tau)$

Функция $\omega_0(\tau)$ монотонно возрастает при $\tau>0$. Функция $\omega_1(\tau)$ имеет минимум, в котором частота достигает значения $\omega_{min} = 0$, что соответствует стоячим волнам. Длина стоячих волн зависит от значения τ.

Таким образом, получены следующие типы решений: 1 – непрерывно возрастающие (убывающие) по амплитуде волны, реально не наблюдаемые; 2 – незатухающие волны деформации, в дисперсионные соотношения которых входят упругие постоянные среды, плотность среды, отношение амплитуд колебаний вынуждающей силы и смещений.

Литература

[1] Bogatov N.M. Gauge field theory of dislocations formation by thermal stresses // Phys. Stat. Sol. (b). 2001. V. 228. №3 P.651− 661.